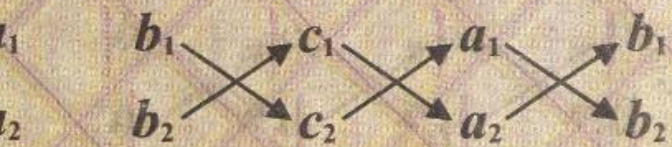
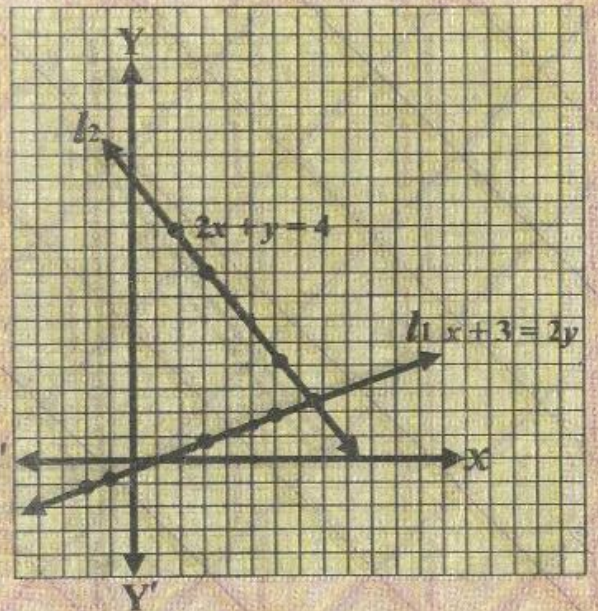
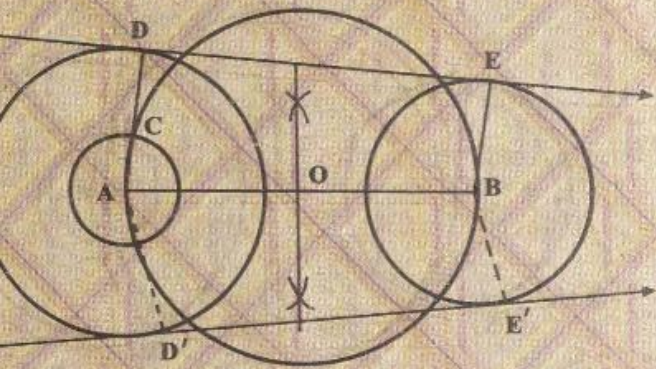
ریاضی
نویں اور دسویں جماعتوں کے لیے
حصہ دوئم
D
E
C
A
O
B
D′
E′
Y
X′
X
Y′
2x + y = 4
x + 3 = 2y
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو سندھ

ریاضی

نویں و دسویں جماعتوں کے لیے

(حصّہ دوئم)

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو سندھ

ناشر

علم و عمل بک ڈپو

کراچی

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو، سندھ

منظور شدہ: وفاقی محکمہ تعلیم اسلام آباد بطور نصابی کتاب برائے مدارس صوبہ سندھ

قومی کمیٹی برائے جائزہ کتب نصاب کی تصحیح شدہ

نگران اعلیٰ

چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

مصنفین

- پروفیسر ڈاکٹر نور مصطفیٰ شیخ
- محب اللہ شیخ
- سکندر علی بابر
- محمد یعقوب میمن
- محمد فاروق
- غفار حسین شیخ
- شمس الحق مغل
- ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا

مدیر

- پروفیسر ڈاکٹر نور مصطفیٰ شیخ
- پروفیسر ڈاکٹر محمد ذکاء اللہ خان

کنسلٹینٹ اینڈ کوآرڈینیٹر

- شمس الحق مغل
- خلیل احمد سرہندی

مترجم

غفار حسین شیخ

کمپوزنگ اور لے آؤٹ ڈیزائننگ

گرافکس اینڈ آرٹ سیکشن علم و عمل بک ڈپو کراچی

مطبع: نیوگزاز پریس کراچی

فہرست

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ ایک ایسا تعلیمی ادارہ ہے جس کا فریضہ درسی کتب کی تیاری واشاعت ہے۔ اس کا اولین مقصد ایسی درسی کتب کی تیاری وفراہمی ہے جو نسل نو کو شعور و آگہی اور ایسی صلاحیت بخشیں جن کے ذریعے وہ اسلام کے آفاقی نظریات، بھائی چارے، اسلاف کے کارناموں اور اپنے ثقافتی ورثہ وروایات کی پاسداری کرتے ہوئے دور جدید کے نت نئے سائنسی، تکنیکی اور معاشرتی تقاضوں کا مقابلہ کر کے کامیاب زندگی گزار سکیں۔

اس اعلیٰ مقصد کی تکمیل کی غرض سے اہل علم، ماہرین مضامین، مدرسین کرام اور مخلص احباب کی ایک ٹیم ہر چار سمت سے حاصل ہونے والی تجاویز کی روشنی میں درسی کتب کے معیار، جائزے اوران کی اصلاح کے لئے ہمارے ساتھ پیہم مصروف عمل ہے۔

ہمارے ماہرین اوراشاعتی عملے کے لئے اپنے مطلوبہ مقاصد کا حصول اسی صورت میں ممکن ہے کہ ان کتب سے اساتذہ کرام اور طلبہ و طالبات کماحقہٗ استفادہ کریں، علاوہ ازیں ان کی تجاویز و آراء ان کتب کے معیار کو مزید بہتر بنانے میں ہمارے لئے ممد و معاون ثابت ہوں گی۔

چیئرمین

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو سندھ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

الجبری جملے

الجبری اظہاریوں اور ایک یا دو متغیرات میں سادہ یک درجی مساواتوں کے بارے میں ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔

1.1 ایک یا دو متغیرات میں سادہ یک درجی مساواتوں کا حل

اگر کسی کھلے جملے میں مساوی کی علامت "=" موجود ہو تو اس قسم کے جملے کو مساوات (Equation) کہتے ہیں۔ متغیر کی جس کی قیمت کے لیے مساوات درست ہو جائے اُسے مساوات کی اصل (Root) کہتے ہیں۔ ایک یا دو متغیرات میں سادہ یک درجی مساوات کے حل کو دہرانے کے لیے ذیل میں چند مثالیں دی گئی ہیں۔

مثال 1. مساوات کو حل کیجیے:

$$\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{6} = 3$$

حل: 4 اور 6 کا ذواضعاف اقل 12 ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات کو 12 سے ضرب دینے سے،

$$12\left(\frac{x-1}{4}\right) - 12\left(\frac{2x-1}{6}\right) = 12 \times 3$$

یا $3(x-1) - 2(2x-1) = 36$

یا $3x - 3 - 4x + 2 = 36$

یا $-x - 1 = 36$

یا $-x = +37$

یا $x = -37$

پس، حل سیٹ = $\{-37\}$

مثال 2. وہ عدد معلوم کیجیے جب اُسے 2 سے ضرب دے کر اس میں 8 جمع کیا جائے تو وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو کہ اُس عدد کو 2 سے تقسیم کر کے 32 جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

حل: فرض کیا وہ عدد x ہے۔

x کو 2 سے ضرب دے کر 8 جمع کرنے پر

$2x + 8$ ... (i)

x کو 2 سے تقسیم کر کے 32 جمع کرنے پر

$$\frac{x}{2} + 32 \qquad \ldots \text{(ii)}$$

دی گئی شرط کے مطابق اظہاریے (i) اور (ii) مساوی ہیں۔

اس لیے
$$2x + 8 = \frac{x}{2} + 32$$

یا
$$2x + 8 = \frac{x + 64}{2}$$

یا
$$2(2x + 8) = x + 64$$

یا
$$4x - x = 64 - 16$$

یا
$$3x = 48$$

یا
$$x = \frac{48}{3} = 16$$

پس مطلوبہ عدد 16 ہے۔

مثال 3. $x + y = 5$ اور $2x - y = 7$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$x + y = 5 \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$2x - y = 7 \qquad \ldots \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے

$$y = 5 - x \qquad \ldots \text{(iii)}$$

y کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$2x - (5 - x) = 7$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 5 + x = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 7 + 5$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 12$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4$$

مساوات (iii) میں $x = 4$ رکھنے سے

$$y = 5 - 4 = 1$$

پس حل سیٹ = $\{(4, 1)\}$

مشق 1.1

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے:

(i) $\frac{6}{2x-5} - \frac{4}{x-3} = 0$ (ii) $\frac{2x-3}{5} = \frac{x-2}{2}$ (iii) $\frac{7x}{8} + 3 = \frac{9x}{10}$

(iv) $\frac{7x-4}{15} + \frac{x-1}{3} = \frac{3x-1}{5} - \frac{7+x}{10}$

2۔ اگر کسی عدد میں 25 جمع کیا جائے تو حاصل ہونے والے عدد کا نصف اصل عدد کے تین گنے کے برابر ہے۔ اصل عدد معلوم کیجیے۔

3۔ اگر کسی عدد کے $\frac{1}{4}$ حصے میں 18 جمع کیا جائے تو حاصل ہونے والا عدد اصل عدد کا $2\frac{1}{2}$ گنا ہے۔ اصل عدد معلوم کیجیے۔

4۔ اگر کسی عدد کے چار گنا میں سے 5 تفریق کیا جائے تو حاصل ہونے والے عدد کا دُگنا 6 کے برابر ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

5۔ اگر کسی عدد اور 4 کا مجموعہ، اس عدد کے تین گنا میں سے 10 کے فرق کے برابر ہو تو عدد بتایئے۔

6۔ ایک بچی کی والدہ اُس سے 21 سال بڑی ہے۔ اگر بچی کی عمر اپنی والدہ کی عمر کی $\frac{1}{4}$ ہو تو اُس بچی کی عمر کیا ہوگی؟

7۔ تین متواتر قدرتی اعداد کا مجموعہ 192 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

{اشارہ: تین متواتر قدرتی اعداد $x-1$, x , $x+1$ لیے جاسکتے ہیں}

8۔ تین متواتر طاق اعداد کا مجموعہ 909 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

{اشارہ: تین متواتر طاق اعداد $x-2$, x , $x+2$ لیے جاسکتے ہیں}

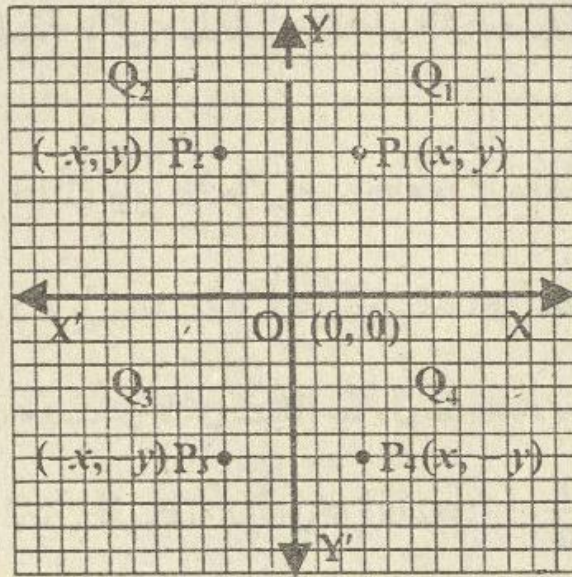
9۔ مبشرہ نے کچھ سیب خریدے۔ پھر اُس نے آدھے درجن سیب اور خریدے۔ کُل سیب پہلے خریدے ہوئے سیب کے $1\frac{1}{2}$ گنا سے 3 کم ہیں۔ پہلے خریدے ہوئے سیبوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

10۔ مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی سے 4 سم زیادہ ہے۔ اگر اس کا احاطہ 192 سم ہو تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

1.2 دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کا بذریعہ ترسیم حل

ترسیمی کاغذ پر نقاط کو مرتسم کرنے کا معیاری طریقہ یہ ہے کہ حقیقی اعداد کے مترتب جوڑوں جو کہ نقاط سے منسوب ہوں، کو دونوں محوروں سے فاصلوں کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

دونوں محور (axis) یعنی افقی اور عمودی خطوط مستوی کو چار حصوں یعنی ربعوں (Quadriants) میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان چاروں ربعوں کو مندرجہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ ذیل شکل میں نقاط $P_1(x,y)$ ، $P_2(-x,y)$ ، $P_3(-x,-y)$ اور $P_4(x,-y)$ کی ترسیم (گراف) بھی دکھائی گئی ہے۔

ہم ذیل میں مساواتوں کی ترسیم (Graph) کی وضاحت کرتے ہیں۔

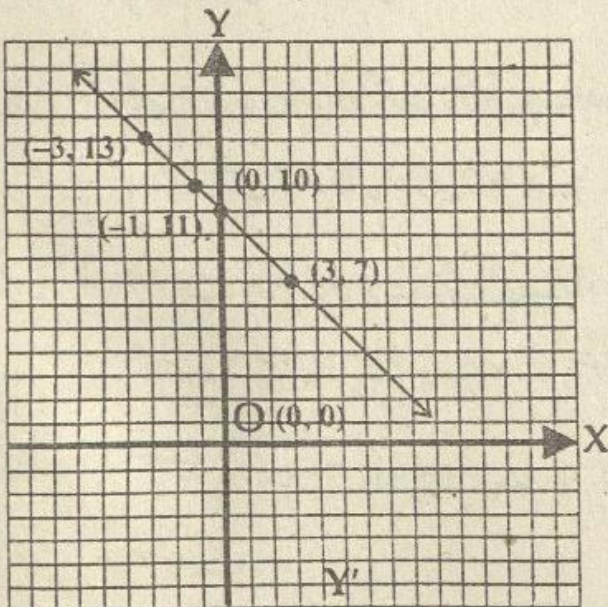
مثال 1. مساوات $x + y = 10$ کو مرتسم کیجیے۔

حل: مساوات $x + y = 10$ میں دو متغیرات x اور y ہیں۔

اس مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں: $y = 10 - x$

اس کی مدد سے ایک جدول تیار کی جاتی ہے۔

اس جدول میں x کی مناسب قیمتیں لے کر y کی متناظرہ قیمتیں معلوم کر کے لکھی جاتی ہیں۔ جیسا کہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔

x	−3	−1	0	3
y	13	11	10	7

جدول کی مدد سے ترسیمی کاغذ پر x اور y کی قیمتوں کے مطابق نقاط حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقاط کو ملانے سے ہمیں مساوات کی مطلوبہ ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2. مندرجہ ذیل ہمزاد یک درجی مساواتوں کو بذریعہ ترسیمی ظاہر کیجیے۔

$2x + y = 6$ اور $x - y = 3$

حل:

$$x - y = 3 \quad \text{... (i)}$$

$$2x + y = 6 \quad \text{... (ii)}$$

ان مساواتوں (i) اور (ii) کو اس طرح لکھتے ہیں:

$$y = x - 3 \quad \text{... (iii)}$$

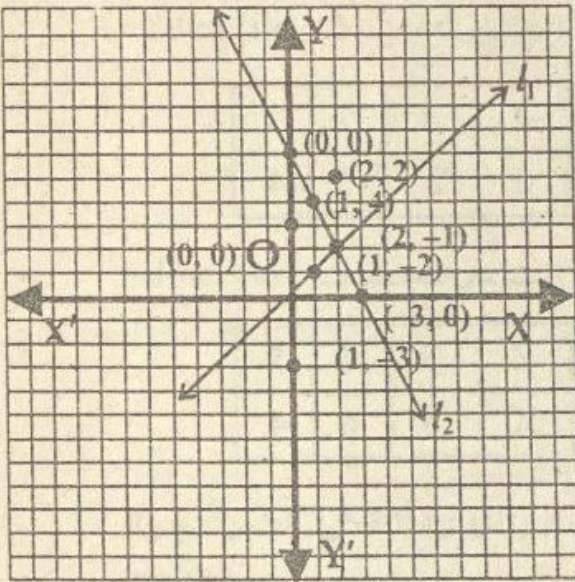
$$y = 6 - 2x \quad \text{... (iv)}$$

ان مساواتوں میں x کی مختلف قیمتیں رکھنے سے y کی متناظرہ قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔

مساوات (iii) کے لیے جدول یہ ہے:

x	0	1	2	3
y	−3	−2	−1	0

مساوات (iv) کے لیے جدول یہ ہے:

x	0	1	2	3
y	6	4	2	0

ان جدول کی مدد سے مساواتوں (iii) اور (iv) کے نقاط کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ ان نقاط کو ملانے سے دی گئیں مساواتوں کی ترسیم ہیں۔

خطوط l_1 اور l_2 کی صورت میں حاصل ہوئی۔ جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ (3, 0) پر قطع کرتے ہیں۔

نوٹ: دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کو حل کرنے کے لیے دی ہوئی مساواتوں کے گراف بنائے جاتے ہیں۔ ان مساواتوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کے مشترک نقطے کے محددات کی قیمتیں دی ہوئی مساواتوں کا حل سیٹ کہلاتی ہیں؟ اس کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی جاتی ہے۔

مثال 3. مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ بذریعہ ترسیم (گراف) معلوم کیجیے۔

$$2x + y = 14 \quad \text{اور} \quad x + 3 = 2y$$

حل:

$$x + 3 = 2y \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$2x + y = 14 \qquad \ldots \text{(ii)}$$

اِن مساواتوں کو دوبارہ اس طرح لکھتے ہیں:

$$y = \frac{x+3}{2} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

$$y = 14 - 2x \qquad \ldots \text{(iv)}$$

ان مساواتوں میں x کی مختلف قیمتیں رکھنے سے y کی متناظرہ قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔

مساوات (iii) کے لیے جدول یہ ہے:

x	–3	–1	1	3	5
y	0	1	2	3	4

مساوات (iv) کے لیے جدول یہ ہے:

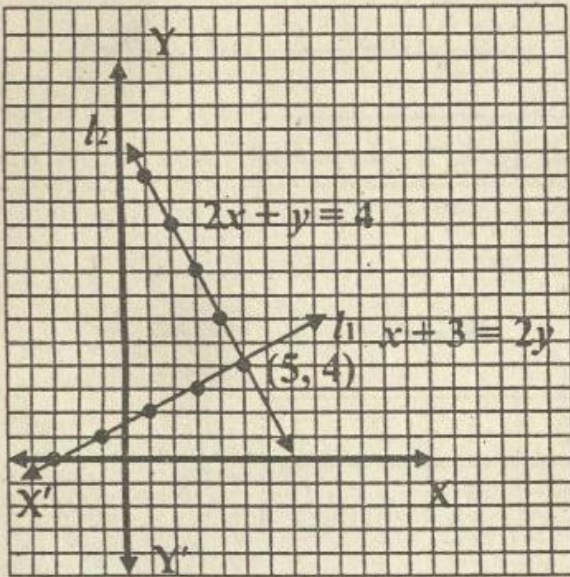
x	1	2	3	4	5
y	12	10	8	6	4

اِن جدول سے ہمیں مساواتوں (iii) اور (iv) کے لیے نقاط حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (iii) کے لیے نقاط کو ملایئے۔

اسی طرح مساوات (iv) کے لیے نقاط کو ملایئے۔

نقاط کو ملانے سے دی گئیں مساواتوں کے گراف خطوط مستقیم l_1 اور l_2 کی شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔ یہ خطوط نقطہ (5,4) پر قطع کرتے ہیں۔

پس حل سیٹ = $\{(5, 4)\}$

مشق 1.2

مندرجہ ذیل ہمزاد یک درجی مساواتوں کو بذریعہ ترسیمی حل کیجیے۔

1. $3x - 11 = y$, $x - 3y = 9$
2. $x + y = 4$, $2x - 1 = 5y$
3. $2x = y + 5$, $x = 2y + 1$
4. $y = 3x - 5$, $x + y = 11$
5. $\frac{x+2}{5} + y = 6$, $2x - y = 12$
6. $\frac{x-y}{3} = 2$, $x - 5y = 0$
7. $2y - 3x = 12$, $x + 6 = y$
8. $5x + 7y = 13$, $7x + 6y = 3$
9. $4x - y - 10 = 0$, $3x + 5y - 19 = 0$
10. $3x - 2y - 7 = 0$, $2x + 5y - 11 = 0$

1.3 ایک متغیر میں جذری مساواتوں کا حل

ایسی مساوات جس میں جذری علامت والا کوئی ایک یا ایک سے زیادہ اظہاریہ ہو، جذری مساوات (Radical equation) کہلاتی ہے۔ مثلاً

$$3\sqrt{y} - \sqrt{y+1} = 2 \text{ اور } \sqrt{y} - 1 = 8$$

جذری مساواتیں ہیں۔

یاد رہے کہ علامت " $\sqrt{\ }$ " صرف مثبت جذر کے لیے ہے۔ اس لیے اگر

$$\sqrt{y-2} = -4$$

تو ایسی مساواتوں کا حل سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے کیونکہ y کی کسی قیمت کے لیے بھی دیا ہوا جملہ درست نہیں ہوگا۔ ایسی صورت میں یہ ضروری ہے کہ متغیر کی جگہ اس کی قیمت رکھ کر پڑتال کر لی جائے۔

جذری مساواتوں کے حل کی وضاحت ذیل میں مثالوں کے ذریعہ کی جاتی ہے۔

مثال 1. $\sqrt{2x-3} + 5 = 12$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:
$$\sqrt{2x-3} + 5 = 12$$
یا
$$\sqrt{2x-3} = 7$$
دونوں اطراف کا مربع لینے سے
$$(\sqrt{2x-3})^2 = (7)^2$$
یا
$$2x - 3 = 49$$
یا
$$2x = 52$$
یا
$$x = \frac{52}{2} \Rightarrow x = 26$$
پس حل سیٹ $= \{26\}$

مثال 2. حل کیجیے: $\sqrt{2y-3} = \sqrt{3y+4}$

حل: $\sqrt{2y-3} = \sqrt{3y+4}$

دونوں اطراف کو مربع کرنے سے

$$(\sqrt{2y-3})^2 = (\sqrt{3y+4})^2$$

یا $2y - 3 = 3y + 4$

یا $2y - 3y = 4 + 3$

$$-y = 7$$

$$y = -7$$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $y = -7$ رکھنے سے

$$\sqrt{2(-7)-3} = \sqrt{3(-7)+4}$$

یا $\sqrt{-17} = \sqrt{-17}$

پس حل سیٹ $= \{-7\}$

مشق 1.3

مندرجہ ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کیجیے اور جواب کی پڑتال بھی کیجیے۔

1. $\sqrt{4x-5} = \sqrt{3x+7}$
2. $3\sqrt{y} = 2$
3. $\sqrt{z} - 8 = 1$
4. $\frac{\sqrt{y}}{3} - 2 = 3$
5. $\frac{\sqrt{4y+2}+13}{6} = 2$
6. $\sqrt{25y-6} = 4\sqrt{y+3}$
7. $\sqrt{12x-4} = \sqrt{4x+8}$
8. $\sqrt{y-7} = -4$
9. $\sqrt{x} - 1 = 8$
10. $3\sqrt{x} + 7 = 10$

1.4 ایک متغیر میں مطلق قیمت (Absolute Value) والی مساوات کا حل

کسی حقیقی عدد x کے لیے x کی مطلق قیمت جسے $|x|$ سے ظاہر کرتے ہیں، کی تعریف اس طرح کرتے ہیں:

(i) اگر $x \geq 0$ تو $|x| = x$

(ii) اگر $x < 0$ تو $|x| = -x$

مثال کے طور پر $|3| = 3$ ، $|-5| = -(-5) = 5$ اور $|0| = 0$

اب ہم ایک متغیر میں مطلق قیمت والی مساوات کو حل کریں گے۔

مثال: $|5y-3| - 6 = 3$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$|5y-3| - 6 = 3$$
$$\Rightarrow |5y-3| = 3+6$$
$$\Rightarrow |5y-3| = 9$$

تعریف (i) کی رو سے

$$5y-3 = 9$$
$$\Rightarrow 5y = 9+3$$
$$\Rightarrow 5y = 12$$
$$\Rightarrow y = \frac{12}{5}$$

تعریف (ii) کی رو سے

$$5y-3 = -9$$
$$\Rightarrow 5y = -9+3$$
$$\Rightarrow 5y = -6$$
$$\Rightarrow y = -\frac{6}{5}$$

پس حل سیٹ $\{-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\}$

مشق 1.4

مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کیجیے:

1. $|2a-3| = 7$
2. $|5b-12| = 9$
3. $|3x| = 6$
4. $\left|\frac{y}{3}\right| = 12$
5. $|y-3| = 4$
6. $\left|\frac{x+1}{3}\right| = 1$
7. $-6 + |5x-3| = 3$
8. $|3x-4| = 22$
9. $|3x-4| + 8 = \frac{3}{4}$
10. $\left|\frac{2x+1}{7}\right| = 1$

1.5 غیر مساواتیں (Inequations)

کھلے جملے جن میں غیر مساوی > یا < کی شرط پائی جاتی ہو غیر مساواتیں کہلاتے ہیں۔ متغیر کی جن قیمتوں کے لیے غیر مساوات درست ہو ان پر مشتمل سیٹ کو غیر مساوات کا حل سیٹ کہتے ہیں۔

پچھلی جماعتوں میں ہم عددی خط پر اعداد کی ترتیب سے متعلق پڑھ چکے ہیں۔ عددی خط پر کوئی عدد اپنے بائیں والے عدد سے بڑا اور دائیں والے عدد سے کم ہوتا ہے۔

مثال 1. $4n - 1 < 7, \forall n \in W$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

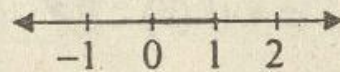
یا $4n < 8$

یا $n < 2$

پس حل سیٹ $= \{ n \mid n \in W, n < 2 \}$

$= \{0, 1\}$

اسے عددی خط پر مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کرتے ہیں:

−1 0 1 2

مثال 2. $x - 7 \le 5 - 2x, \forall x \in R$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے اور اسے عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل:

$$x - 7 \le 5 - 2x$$

$$\Rightarrow x + 2x \le 5 + 7$$

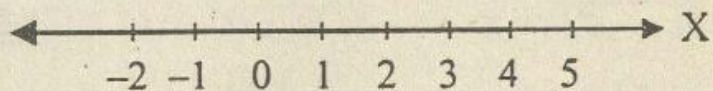
$$\Rightarrow 3x \le 12$$

$$\Rightarrow x \le 4$$

پس حل سیٹ $= \{ x \mid x \in R, x \le 4 \}$

اسے عددی خط پر گہرے سیاہ خط سے ظاہر کیا گیا ہے:

X

−2 −1 0 1 2 3 4 5

مثال 3. $-8 < (2x + 5) < 11, \forall x \in Z$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$-8 < (2x + 5) < 11$$

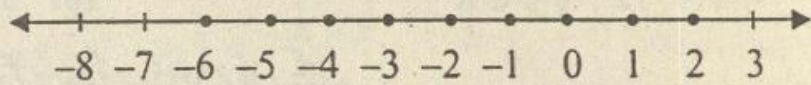
ذیل میں اس طرح غیر مساوات کو دو حصوں میں بیان کیا گیا ہے۔

$(2x+5) < 11$	$-8 < (2x+5)$
$2x+5 < 11$	$\Rightarrow -8 < 2x+5$
$2x < 6$	$\Rightarrow -13 < 2x$
$x < 3$	$\Rightarrow -\frac{13}{2} < x$

پس حل سیٹ = $\{x \mid x \in Z, \text{ and } -\frac{13}{2} < x < 3\}$

$= \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

اِسے عددی خط پر ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3

مثال 4. $\left|\frac{2x-1}{3}\right| < 2, \forall x \in R$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی مساوات کی دو ممکنہ صورتیں ہو سکتی ہیں۔

پہلی صورت	دوسری صورت
$\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 2$	$-\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 2$
$\Rightarrow 2x-1 < 6$	$\Rightarrow \frac{2x-1}{3} > -2$
$\Rightarrow 2x < 7$	$\Rightarrow 2x-1 > -6$
$\Rightarrow x < \frac{7}{2}$	$\Rightarrow 2x > -5$
	$\Rightarrow x > -\frac{5}{2}$
	$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x$

پس حل سیٹ = $\{x \mid x \in R, \text{ and } -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}\}$

مشق 1.5

مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کیجیے:

1. $2a-6 > 3+a, \ \forall a \in N$
2. $6b-5 < b+10, \ \forall b \in R$
3. $\frac{x+5}{10} < \frac{25-4x}{5}, \ \forall x \in N$
4. $\frac{7+5x}{3} > \frac{1-x}{2}, \ \forall x \in R$
5. $\frac{7y}{8} + \frac{y+4}{6} + \frac{3}{8} > \frac{3y-4}{4}, \ \forall y \in Z$
6. $7-2x > 6, \ \forall x \in R$
7. $\frac{4-x}{2} + \frac{3x+4}{8} - \frac{5x}{8} > \frac{11}{2}, \ \forall x \in R$
8. $|3x-2| < x+5, \ \forall x \in R$
9. $|5+3y| < 12, \ \forall y \in R$
10. $5(3y-2) > 3(y-5), \ \forall y \in R$

مندرجہ غیر مساواتوں کو حل کیجیے اور ہر حل سیٹ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

11. $7-5a \le 32, \ \forall x \in Z$
12. $7 < 2y+3 < 15, \ \forall y \in N$
13. $-8 < 3y < 14, \ \forall y \in N$
14. $2(3x+5) > 4x, \ \forall x \in R$
15. $3(x+5) > 2(x+2)+8, \ \forall x \in R$

1.6 ایک متغیر میں دو درجی مساوات

اگر $a \neq 0$ ، $a, b, c \in R$ تو $ax^2+bx+c=0$ کو ایک متغیر x میں دو درجی مساوات کی معیاری صورت کہتے ہیں۔ a اور b بالترتیب x^2 اور x کے عددی سر ہیں۔ اور c مستقل ہے۔

اِس حصے میں ہم عددی سر ناطق اعداد لیتے ہیں۔

حقیقی اعداد کے خواص میں سے ایک خاصیت یہ ہے:

اگر دو حقیقی اعداد p اور q اس طرح ہوں کہ $p \times q = 0$ تو $p=0$ یا $q=0$ یا دونوں p اور q صفر ہوں گے۔

اِس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے دو درجی مساوات کو عملِ تجزی کے ذریعے حل کریں گے۔

1.7 دو درجی مساواتوں کا حل بذریعہ عملِ تجزی

دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کو حل کرنے کے لیے ہم اظہاریہ ax^2+bx+c کی پہلے تجزی کرتے ہیں اور پھر مندرجہ بالا خاصیت کو حل کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مثال 1. $x^2 - 7x - 18 = 0$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

یا $$x^2 - 9x + 2x - 18 = 0$$

یا $$x(x-9) + 2(x-9) = 0$$

یا $$(x-9)(x+2) = 0$$

اس لیے

$$x - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 2 = 0$$

یا $$x = 9 \quad \text{یا} \quad x = -2$$

پس حل سیٹ $= \{-2, 9\}$

مثال 2. $6x^2 + 12 = 17x$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$6x^2 + 12 = 17x$$

دی گئی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے

$$6x^2 - 17x + 12 = 0$$

یا $$6x^2 - 9x - 8x + 12 = 0$$

یا $$3x(2x-3) - 4(2x-3) = 0$$

یا $$(2x-3)(3x-4) = 0$$

اس لیے

$$2x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x - 4 = 0$$

یا $$2x = 3 \quad \text{یا} \quad 3x = 4$$

یا $$x = \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{4}{3}$$

پس حل سیٹ $= \{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$

مشق 1.6

مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کو معیاری صورت میں لکھیے:

1. $(x-3)(x-4)=0$
2. $5x^2+10x=4(3x-1)$
3. $z^2=3(4z-1)$
4. $x^2+7=-2x$
5. $2p^2=5p-2$
6. $15+2s-s^2=0$
7. $2m^2-3=-5m$
8. $q^2+7q=60$

مندرجہ ذیل مساواتوں کو بذریعہ عملِ تجزی حل کیجیے۔

9. $x^2-5x+6=0$
10. $x^2+x=6$
11. $2x^2+21=13x$
12. $3(x-5)(x-7)=4(x+3)$
13. $(2x+1)(x+3)+3=0$
14. $2x(4x-1)=15$
15. $x(x+1)+x(x+2)+x(x+3)+3=0$
16. $x+\frac{6}{x}=5, (x\neq 0)$

1.8 دو درجی مساواتوں کا حل بذریعہ تکمیل مربع

تکمیل مربع کے طریقے کی وضاحت ذیل میں کی جاتی ہے۔

(i) دی گئی مساوات کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(ii) مساوات کے طرفین کو x^2 کے عددی سر، اگر 1 نہ ہو، سے تقسیم کیجیے۔

(iii) مستقل رقم کو دائیں طرف منتقل کیجیے۔

(iv) طرفین میں $\left(\frac{x \text{ کا عددی سر}}{2}\right)^2$ جمع کیجیے۔

(v) بائیں طرف کو مکمل مربع کی صورت میں لکھیے اور دائیں طرف کو مختصر کیجیے۔

(vi) طرفین کا جذر المربع لیجیے۔ دائیں طرف کے ساتھ مثبت اور منفی دونوں علامت کو لکھیے۔ اس کے بعد x کے لیے لیے حل کیجیے۔

مثال 1. $x^2 - 6x = 7$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:
$$x^2 - 6x = 7$$

دی گئی مساوات میں پہلے ہی تین مرحلے طے ہو چکے ہیں۔

اب مساوات کے طرفین میں $(-\frac{6}{2})^2 = 9$ جمع کرنے سے

$$x^2 - 2(3)x + 9 = 7 + 9$$

یا $$(x-3)^2 = 16$$

یا $$x - 3 = \pm\sqrt{16}$$

یا $$x = 3 \pm 4$$

یعنی $x = 3 + 4 = 7$ یا $x = 3 - 4 = -1$

پس حل سیٹ = $\{7, -1\}$

مثال 2. $2x^2 + 7x + 4 = 0$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل: (پہلا مرحلہ)
$$2x^2 + 7x + 4 = 0$$

(دوسرا مرحلہ) یا $$x^2 + \frac{7x}{2} + \frac{4}{2} = \frac{0}{2}$$

یا $$x^2 + \frac{7x}{2} + 2 = 0$$

(تیسرا مرحلہ) یا $$x^2 + \frac{7x}{2} = -2$$

(چوتھا مرحلہ) یا $$x^2 + 2(\frac{7}{4})x + \frac{49}{16} = -2 + \frac{49}{16}$$

(پانچواں مرحلہ) یا $$(x + \frac{7}{4})^2 = \frac{-32 + 49}{16}$$

یا $$(x + \frac{7}{4})^2 = \frac{17}{16}$$

یا $$x + \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

یا $$x = -\frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

یا $x = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$ یا $x = -\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$

یعنی $x = \frac{-7 + \sqrt{17}}{4}$ یا $x = \frac{-7 - \sqrt{17}}{4}$

پس حل سیٹ = $\left\{\frac{-7 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-7 - \sqrt{17}}{4}\right\}$

مشق 1.7

مندرجہ ذیل مساواتوں کو بذریعہ تکمیل مربع حل کیجیے۔

1. $x^2 - 2x = 1$
2. $x^2 - 2x = 2$
3. $x^2 - 3x = 2$
4. $2x^2 + x = 5$
5. $3x^2 - 5x - 3 = 0$
6. $12 = 4x + 5x^2$
7. $12x - 3 = x^2$
8. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
9. $(x + 2)(x - 3) = (x - 3)$
10. $x^2 + 60x - 61 = 0$
11. $2x^2 + 10x - 48 = 0$
11. $15x^2 - 34x + 15 = 0$

1.9 دودرجی کلیہ (Quadratic Formula)

دودرجی مساوات کی معیاری صورت جس میں عددی سر یں اعداد پر مشتمل ہیں، یہ ہے:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0$$

اس مساوات کو a سے تقسیم کرنے سے

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{... (i)}$$

مستقل رقم کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \qquad \text{... (ii)}$$

بائیں طرف کو مربع بنانے کے لیے مساوات (ii) کے طرفین میں $[\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}]^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ جمع کرنے سے

$$(x)^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دونوں طرفین کا جذرالمربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اسے دو درجی کلیہ (Quadratic Formula) کہتے ہیں۔

1.10 دو درجی مساواتوں کا حل بذریعہ دو درجی کلیہ

آرٹیکل 1.9 میں دو درجی کلیہ اخذ کیا جا چکا ہے جو یہ ہے:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ a \neq 0, \forall a, b, c \in Q$$

مثال 1. بذریعہ دو درجی کلیہ $2x^2 - 7x + 6 = 0$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

یہاں $a = 2, \ b = -7, \ c = 6$

ہم جانتے ہیں کہ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

اس لیے $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$

یا $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$

یا $x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4}$

یا $x = \frac{7 \pm 1}{4}$

اس لیے $x = \frac{7 - 1}{4}$ یا $x = \frac{7 + 1}{4}$ یا

یعنی $x = \frac{3}{2}$ یا $x = 2$ یا

پس حل سیٹ = $\{2, \frac{3}{2}\}$

مثال 2. بذریعہ دو درجی کلیہ $4x^2 + 12x = 0$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:
$$4x^2 + 12x = 0$$

یہاں $a = 4$, $b = 12$ اور $c = 0$

ہم جانتے ہیں کہ
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اس لیے
$$x = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(4)(0)}}{2(4)}$$

یا
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144}}{8}$$

یا
$$x = \frac{-12 \pm 12}{8}$$

اب
$$x = \frac{-12 + 12}{8} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-12 - 12}{8}$$

یعنی
$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-24}{8} = -3$$

پس حل سیٹ $= \{-3 , 0\}$

مشق 1.8

مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کو بذریعہ دو درجی کلیہ حل کیجیے۔

1. $3a^2 - 12a - 15 = 0$
2. $k^2 - 2k - 63 = 0$
3. $y^2 - y - 56 = 0$
4. $3(y^2 - 1) - 4(y + 1) = 0$
5. $2b^2 - 7b + 5 = 0$
6. $5x^2 - 9 = 0$
7. $2m^2 - 3 = -5m$
8. $5x^2 + 11x = 4(3x + 1)$
9. $3x - x^2 = -\frac{7}{4}$
10. $\frac{1}{y+4} - \frac{1}{y-4} = 4, (y \neq \pm 4)$

متفرق مشق I

مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

1. $y-4=\frac{y-2}{y}, (y\neq 0)$ 2. $z+\frac{1}{z}=2, (z\neq 0)$

3. $\frac{z+1}{z}+\frac{z}{z+1}=\frac{13}{6}, (z\neq 0,-1)$ 4. $\frac{3}{y+8}+\frac{4}{y+2}=\frac{5}{y}, (y\neq 0,-2,-8)$

5۔ اگر $z=3$ مساوات $z^2+kz+15=0$ کا حل ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔
مساوات کے دیگر حل معلوم کیجیے۔

6۔ مستطیل کا احاطہ $20cm$ اور اس کا رقبہ $24cm^2$ ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

7۔ مکمل عدد معلوم کیجیے جبکہ اس عدد میں اس کے مربع کا دگنا جمع کرنے سے 10 حاصل ہوتا ہے۔

8۔ مثلث کا قاعدہ اور اونچائی بالترتیب $(x+3)\ cm$ اور $(2x-5)\ cm$ ہیں۔ اگر مثلث کا رقبہ $20cm^2$ ہے تو x معلوم کیجیے۔

9۔ مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی سے $5cm$ زیادہ ہے۔ اور اس کا رقبہ $66cm^2$ ہے۔ مستطیل کا احاطہ معلوم کیجیے۔

10۔ صحیح جواب منتخب کر کے خالی جگہ میں لکھیے۔

(i) $|-5|$ ، -5 کی مطلق قیمت ______ ہے۔

(a) -5 (b) ∓ 5 (c) ± 5 (d) $-(-5)$

(ii) $2y>5$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

(a) $\{y \mid y\in R \wedge y<\frac{5}{2}\}$ (b) $\{x \mid x\in R \wedge x>\frac{5}{2}\}$

(c) $\{y \mid y\in R \wedge y>\frac{5}{2}\}$ (d) کوئی بھی نہیں ہے۔

(iii) $\sqrt{y-2}=-4$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

(a) 18 (b) ± 4 (c) $\{\ \}$ (d) کوئی بھی نہیں ہے۔

(iv) ہمزاد مساواتوں $x+y=5$ اور $2x-y=7$ کا حل سیٹ ______ ہے۔

(a) $\{4, 1\}$ (b) $\{(1,4)\}$ (c) $\{(4,1)\}$ (d) $\{(2,3)\}$

(v) $x+1=0$ ________ ہے۔

(a) دو درجی مساوات (b) یک درجی مساوات نہیں

(c) یک درجی مساوات (d) غیر ناطق مساوات

(vi) $3\sqrt{y}-\sqrt{y+1}=2$ ________ ہے۔

(a) y میں یک درجی مساوات (b) غیر ناطق مساوات

(c) نہ یک درجی اور نہ ہی غیر ناطق (d) ذاتی تماثل مساوات

(vii) $ax^2+bx+c=0$ دو درجی مساوات ہوگی اگر

(a) $a\neq 0$ اور $b=c=0$ (b) $a=0$ اور $b\neq 0$, $c\neq 0$

(c) $a\neq 0$ اور $c=0$ (d) دونوں (a) اور (c)

(viii) مساوات $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ کے اصل ________ ہیں۔

(a) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (b) $\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(c) $\dfrac{b\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ (d) $\dfrac{-b\pm\sqrt{a^2-4ac}}{2a}$

(ix) مساوات $ax^2-bx+c=0$, $a\neq 0$ کے اصل ________ ہیں۔

(a) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (b) $\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(c) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ (d) کوئی بھی نہیں

(x) اگر $(x-2)(x+3)=0$ تو $x=$ ________

(a) $-3, -2$ (b) $3, 2$

(c) $-3, 2$ (d) $3, -2$

اسقاط

2.1 اسقاط کا تصور

مندرجہ ذیل مساواتوں کو ملاحظ کیجیے۔

$$V_f = V_i + at$$

اور

$$S = V_i t + \frac{1}{2} at^2$$

اِن مساواتوں میں V_f , V_i , S, اور t متغیرات ہیں جبکہ a مستقل مقدار ہے اگر ہم ایک ایسا ربط معلوم کرنا چاہیں جن میں V_f , V_i شامل ہوں اور t شامل نہ ہو تو پہلی مساوات سے t کی قیمت نکال کر دوسری مساوات میں رکھنے کے بعد مختصر کرنے سے مساوات $V_f^2 - V_i^2 = 2as$ حاصل ہوتی ہے۔ لہٰذا دی گئی مساواتوں میں سے کسی خاص متغیر کو ساقط کرنے کے لیے جو طریقہ استعمال کیا جاتا ہے اسے طریقہ اِسقاط (Elimination) کہتے ہیں اور طریقہ اسقاط سے جو ربط حاصل ہوتا ہے اُسے ساقط شدہ (Eliminant) کہتے ہیں۔

اِسقاط کے مختلف طریقے ہیں جن میں سے چند ایک کی وضاحت ذیل میں کی گئی ہے۔

2.2 قیمت درج کرنے کا طریقہ

مثال 1. مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے b ساقط کیجیے۔

$$a + 3b = -1$$
$$a - b = 3$$

حل: دی گئی مساواتیں ہیں:

$$a + 3b = -1 \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$a - b = 3 \qquad \ldots \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کی رو سے

$$b = a - 3$$

مساوات (i) میں b کی قیمت درج کرنے سے

$$a + 3(a - 3) = -1$$

یا $a + 3a - 9 = -1$

یا $4a = 9 - 1$

یا $a = \frac{8}{4}$

یا $a = 2$

یہ ایک ایسا ربط ہے جس میں صرف a موجود ہے اور متغیر b کو ساقط کیا گیا ہے۔

مثال 2. اگر

$$V = Vf - Vi \quad \text{(i) ...}$$

$$a = \frac{V}{t} \quad \text{(ii) ...}$$

حل: مساوات (ii) کی رو سے $V = at$

مساوات (i) میں V کی قیمت درج کرنے سے

$at = Vf - Vi$

یا $at + Vi = Vf - Vi + Vi$

یا $Vi + at = Vf$

پس $Vf = Vi + at$ مطلوبہ ربط ہے۔

مثال 3. اگر

$$V = \frac{Vi + Vf}{2} \quad \text{(i) ...}$$

$$Vf = Vi + at \quad \text{(ii) ...}$$

اور

$$s = V \times t \quad \text{(iii) ...}$$

تو s اور t میں ربط معلوم کیجیے جبکہ a اور Vi مستقلات ہیں۔

حل: مساوات (iii) میں V کی قیمت درج کرنے سے

$$s = \frac{(Vi + Vf)}{2} \times t \quad \text{... (iv)}$$

مساوات (iv) میں Vf کی قیمت درج کرنے سے

یا $s = \frac{(Vi + Vi + at)}{2} \times t$

یا $s = \frac{(2Vi + at)}{2} \times t$

$s = Vit + \frac{1}{2} at^2$

پس $s = Vit + \frac{1}{2} at^2$ مطلوبہ ربط ہے۔

مثال 4. اگر

$$V_f = V_i + at \quad \text{(i) ...}$$

$$s = V_i t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(ii) ...}$$

تو t سے آزاد V_i , V_f اور s میں ربط معلوم کیجیے جبکہ a مستقل ہے۔

حل: مساوات (i) کی رو سے $t = \frac{V_f - V_i}{a}$

مساوات (ii) میں t کی قیمت درج کرنے سے

$$s = V_i \frac{(V_f - V_i)}{a} a + \frac{1}{2} a \frac{(V_f - V_i)^2}{a}$$

یا $$s = \frac{V_f V_i - V_i^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(V_f - V_i)^2}{a^2}$$

یا $$s = \frac{V_f V_i - V_i^2}{a} + \frac{(V_f^2 - 2V_f V_i + V_i^2)}{2a}$$

یا $$s = \frac{2(V_f V_i - V_i^2) + (V_f^2 - 2V_f V_i + V_i^2)}{2a}$$

یا $$s = \frac{2V_f V_i - 2V_i^2 + V_f^2 - 2V_f V_i + V_i^2}{2a}$$

یا $$s = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2a}$$

یا $2as = V_f^2 - V_i^2$ جو کہ مطلوبہ ربط ہے۔

2.3 موازنہ کرنے کا طریقہ

مثال 1: مندرجہ ذیل مساواتوں میں t ساقط کیجیے۔

$$y = at^2 \quad \text{اور} \quad x = 2at$$

حل: دی گئی مساواتیں ہیں:

$$x = 2at \quad \text{... (i)}$$

$$y = at^2 \quad \text{... (ii)}$$

مساوات (i) کی رو سے $t = \frac{x}{2a}$

یا $$t^2 = \frac{x^2}{4a^2} \quad \text{... (iii)}$$

مساوات (ii) کی رو سے

$$t^2 = \frac{y}{a} \quad \text{... (iv)}$$

مساواتوں (iii) اور (iv) سے t^2 کی قیمتوں کا موازنہ کرنے سے

$$\frac{x^2}{4a^2} = \frac{y}{a}$$

یعنی $x^2 = 4ay$

یہ متغیرات x اور y میں مطلوبہ ربط ہے۔ جس میں t کو ساقط کیا گیا ہے۔

2.4 اسقاط بذریعہ کلیات

مثال 1. مندرجہ ذیل مساواتوں میں t سے آزاد ربط معلوم کیجیے۔

$$a + \frac{1}{a} = x$$

$$a - \frac{1}{a} = y$$

حل: دی گئی مساواتیں ہیں:

$$a + \frac{1}{a} = x \qquad \text{... (i)}$$

$$a - \frac{1}{a} = y \qquad \text{... (ii)}$$

مساواتوں (i) اور (ii) کے دونوں اطراف مربع کرنے سے

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = x^2 \qquad \text{... (iii)}$$

$$a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = y^2 \qquad \text{... (iv)}$$

مساوات (iii) میں سے مساوات (iv) تفریق کرنے سے

$$x^2 - y^2 = 4$$

جو کہ t سے آزاد مطلوبہ ربط ہے۔

مثال 2. مندرجہ ذیل میں سے t ساقط کیجیے۔

$$\frac{y}{b} = \frac{1-t^2}{2t} \quad \text{اور} \quad \frac{x}{a} = \frac{1+t^2}{2t}$$

حل:

$$\frac{x}{a} = \frac{1+t^2}{2t} \qquad \text{... (i)}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{1-t^2}{2t} \qquad \text{... (ii)}$$

مساواتوں (i) اور (ii) کو مربع کرنے سے

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{4t^2} \qquad \text{... (iii)}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1-2t^2+t^4}{4t^2} \qquad \text{... (iv)}$$

مساوات (iii) میں سے مساوات (iv) تفریق کرنے سے

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{4t^2} - \frac{1-2t^2+t^4}{4t^2}$$

یا $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{4t^2}{4t^2}$$

یا $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

جوکہ x اور y میں ربط ہے جس میں t ساقط کیا گیا ہے۔

2.5 ضرب چلیپائی (Cross-Multiplication) کا طریقہ

مثال 1. مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو ساقط کیجیے۔

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \qquad \text{... (i)}$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \qquad \text{... (ii)}$$

حل: مساوات (i) کو a_2 اور مساوات (ii) کو a_1 سے ضرب کرنے سے

$$a_1a_2x^2 + a_2b_1x + a_2c_1 = 0 \qquad \text{... (iii)}$$

$$a_1a_2x^2 + a_1b_2x + a_1c_2 = 0 \qquad \text{... (iv)}$$

مساوات (iv) میں سے (iii) تفریق کرنے سے

$$a_1a_2x^2 + a_1b_2x + a_1c_2 = 0$$

$$\pm a_1a_2x^2 \pm a_2b_1x \pm a_2c_1 = 0$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + (a_1c_2 - a_2c_1) = 0$$

یا $$(a_1b_2 - a_2b_1)x = -(a_1c_2 - a_2c_1)$$

یا $$(a_1b_2 - a_2b_1)x = a_2c_1 - a_1c_2$$

پس $$\frac{x}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{... (v)}$$

مساوات (i) کو b_2 اور مساوات (ii) کو b_1 سے ضرب دینے کے بعد حاصل ہونے والی مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$a_1 b_2 x^2 + b_1 b_2 x + b_2 c_1 = 0$$
$$\pm a_2 b_1 x^2 \pm b_1 b_2 x \pm b_1 c_2 = 0$$
$$a_1 b_2 x^2 - a_2 b_1 x^2 + b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0$$

یا
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x^2 = -(b_2 c_1 - b_1 c_2)$$

یا
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x^2 = (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

پس
$$\frac{x^2}{b_1 c_2 - c_1 b_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{... (vi)}$$

مساوات (v) اور (vi) کی مدد سے

$$\frac{x^2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{x}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \quad \text{... (vii)}$$

مندرجہ ذیل طریقے کی مدد سے ان مساوات کو آسانی کے ساتھ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دی گئی مساواتوں کے عددی سروں کو مندرجہ ذیل طریقے سے لکھنے سے:

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

پس
$$\frac{x^2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{x}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

لہذا
$$x^2 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \quad \text{... (viii)}$$

اور
$$x = \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \quad \text{... (ix)}$$

مساوات (ix) کو مربع کرنے سے

$$x^2 = \frac{(c_1 a_2 - a_1 c_2)^2}{(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2} \quad \text{... (x)}$$

مساواتوں (viii) اور (x) کا موازنہ کرنے سے

$$\frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{(c_1 a_2 - a_1 c_2)^2}{(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}$$

دونوں اطراف کو $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$ سے ضرب کرنے سے

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2) = (c_1 a_2 - a_1 c_2)^2$$

جو کہ x سے آزاد مطلوبہ ربط ہے۔

مشق 2.1

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے a کو قیمت درج کرنے کے طریقے سے ساقط کیجیے۔

(i) $2a + 3b - 5 = 0, \quad a - 2b + 1 = 0$　(ii) $4a + 3b + 8 = 0, \quad a + 5b - 2 = 0$

(iii) $a - 2x + 1 = 0, \quad 3a + x - 3 = 0$　(iv) $a^2 + y = 0, \quad ap + q = 0$

(v) $a^2 + b^2 = 0, \quad a - b = c$

2۔ قیمت درج کرنے کے طریقے سے مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t ساقط کیجیے۔

(i) $y = \frac{2}{5}t, \quad x = \frac{1}{2}t,$　(ii) $y = 2at, \quad x = at^2$

(iii) $ay + t = 0, \quad bx - at = 0$　(iv) $Vf = Vi + gt, \quad s = Vit + \frac{1}{2}gt^2$

3۔ موازنہ کرنے کے طریقے سے مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے Vi ساقط کیجیے۔

(i) $Vf = Vi + gt, \quad s = Vit - \frac{1}{2}gt^2$　(ii) $Vf = Vi + at, \quad s = Vit + \frac{1}{2}at^2$　(iii) $Vf^2 - Vi^2 = 2gs, \quad Vf = Vi + gt$

4۔ کلیات کے ذریعہ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x سے آزاد روابط معلوم کیجیے۔

(i) $x + \frac{1}{x} = 2p, \quad x - \frac{1}{x} = 2q + 1$　(ii) $x - \frac{1}{x} = 2a, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2$　(iii) $x + \frac{1}{x} = 2a, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = b^3$

(iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = b^4$　(v) $ax^2 + bx + c = 0, \quad px^2 + qx + r = 0$　(vi) $10x^2 - 6x + c = 0, \quad 12x^2 - 10x + d = 0$

5۔ کلیات کے ذریعہ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کیجیے۔

(i) $\frac{x}{p} = \frac{1 + t^2}{2t}, \quad \frac{y}{q} = \frac{1 - t^2}{2t}$　(ii) $x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{b(1 - t^2)}{2t^2}$

$\left[\text{Hint}: \frac{b}{y} = \frac{2^{2}}{(1 - t^2)}, \quad \frac{a}{x} = \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)}\right]$

6۔ بذریعہ ضرب چلیپائی مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو ساقط کیجیے۔

(i) $px^2 + qx - r = 0,$ $ax^2 + bx - c = 0$

(ii) $2x^2 - x + l = 0,$ $x^2 - 3x - m = 0$

(iii) $3x + 4y = 22$ $-4x + 5y = 43$

7۔ مندرجہ ذیل سے a کو ساقط کیجیے۔

(i) $x = 2a.$ $y = a^2 - 2at - 3$

(ii) $4a + 3x = 22$ $5a - 4x = 43$

(iii) $x = 3a.$ $y = 2a$

8۔ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے y کو ساقط کیجیے۔

(i) $\frac{y}{b} + \frac{b}{y} = 2c$ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{b^2}{y^2} = a^2$

(ii) $y + \frac{1}{y} = a,$ $y^2 + \frac{1}{y^2} = 4a^2$

(iii) $\frac{1}{y} + y = 21$ $y - \frac{1}{y} = 2m + 1$

(iv) $y + \frac{1}{y} = b,$ $y^3 + \frac{1}{y^3} = a^3$

تغیرات

3.1 نسبت

ایک ہی قسم کی دو مقداروں کے باہمی تعلق کو نسبت (Ratio) کہتے ہیں۔ a سے b کی نسبت کو عام طور پر " $a : b$ " لکھتے ہیں۔ مقداریں a اور b نسبت کی رقوم یا ارکان (Terms) کہلاتی ہیں۔ بائیں سے پہلی رقم مقدم (Antecedent) اور دوسری رقم مؤخر (Consequent) کہلاتی ہیں۔

نسبت $a : b$ کی کسر $\frac{a}{b}$ میں پیمائش کی جاسکتی ہے۔

دو مقداروں کا موازنہ کرنے کے لیے اُنھیں ایک ہی اکائی میں ظاہر کرنا ہوتا ہے۔

کسور کے قوانین کی رو سے

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$$

یعنی نسبت $a : b$، نسبت $ma : mb$ کے مساوی ہے۔ اس سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ اگر دو نسبتوں $a : b$ اور $c : d$ کا موازنہ کرنا ہو تو اُن سے متعلق کسور کا موازنہ کیا جائے۔

اگر دو مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے ظاہر کیا جائے تو اُن مقداروں کو موافقت پذیر (Comman surable) کہتے ہیں۔ اگر ایسا نہ ہو تو اُنھیں ناموافقت پذیر (Incommen surable) کہتے ہیں۔

حالانکہ ہم ایسے دو صحیح اعداد معلوم نہیں کر سکتے ہیں جو مکمل طور پر ناموافقت پذیر مقداروں کی نسبت ناپ سکیں۔ ہم ہمیشہ ایسے دو صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن کی نسبت کا فرق دی گئی نسبت سے بہت معمولی ہو۔

پس $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{2.236067....}{4} = 0.559016......$

لہٰذا $\frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{559016}{1000000}$

اور $\frac{\sqrt{5}}{4} < \frac{559017}{1000000}$

اس لیے نسبتوں $559016 : 1000000$ اور $\sqrt{5} : 4$ کے درمیان فرق 0.000001 سے کم ہے۔ نقطۂ اعشاریہ کے بعد مزید مقامات لینے سے ایک قریبی اندازہ ہوتا ہے۔

نسبتوں کو (Compound) یکجا کرنے کے لیے اُن کسور کو ضرب دیتے ہیں جو انھیں ظاہر کرتی ہے یا اُن کے مقدم کو نئے مقدم کے لیے اور مؤخر کو نئے مؤخر کے لیے ضرب دیتے ہیں۔

مثال: تین نسبتوں $2a : 3b$ ، $6ab : 5c^2$ اور $c : a$ کو یکجا کر کے نسبت معلوم کیجیے۔

حل: مطلوبہ نسبت $= \dfrac{2a}{3b} \times \dfrac{6ab}{5c^2} \times \dfrac{c}{a}$

$$= \frac{2a \times 5ab \times c}{3b \times 5c^2 \times a} = \frac{4a}{5c}$$

جب نسبت $a : b$ کو اپنے آپ سے یکجا کیا جائے تو حاصل ہونے والی نسبت $a^2 : b^2$ ہے۔ اِسے دُگنی نسبت (Duplicate ratio) کہتے ہیں۔

اِسی طرح $a^3 : b^3$ کو اِس کی تگنی نسبت (Triplicate ratio) کہتے ہیں۔ $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ کو $a : b$ کی ذیلی دُگنی نسبت (Sub-duplicate ratio) کہتے ہیں۔

مثالیں: (i) $2a : 3b$ کی دُگنی نسبت $4a^2 : 9b^2$ ہے۔

(ii) $25 : 49$ کی ذیلی دُگنی نسبت $5 : 7$ ہے۔

(iii) $2x : 1$ کی تگنی نسبت $8x^3 : 1$ ہے۔

کسی نسبت میں مقدم کے مؤخر سے زیادہ یا کم یا برابر ہونے کے مطابق نسبت کو بڑی یا چھوٹی غیر مساوات (inequality) یا مساوات کی نسبت کہتے ہیں۔

بڑی غیر مساوات کی نسبت گھٹ جاتی ہے اور چھوٹی غیر مساوات کی نسبت بڑھ جاتی ہے اگر اِن دونوں کی رقوم میں ایک ہی مثبت مقدار جمع کی جائے۔

فرض کیجیے کہ $\dfrac{a}{b}$ ایک نسبت ہے۔ اس کی دونوں رقوم میں x جمع کرنے سے ایک نئی نسبت $\dfrac{a+x}{b+x}$ حاصل ہوتی ہے۔

اب
$$\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} = \frac{ax - bx}{b(b+x)} = \frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

جبکہ $x > 0$ اور $a - b$ مثبت یا منفی ہے اگر a ، b سے بڑا یا چھوٹا ہے۔

پس اگر $a > b$ تو $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+x}{b+x}$ (یعنی نئی نسبت گھٹ جاتی ہے)

اور اگر $a < b$ تو $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x}$ (یعنی نئی نسبت بڑھ جاتی ہے)

اس طرح ہمارا مفروضہ ثابت ہوتا ہے۔

اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ بڑی غیر مساوات کی نسبت بڑھ جاتی ہے اور چھوٹی غیر مساوات کی نسبت گھٹ جاتی ہے اگر اِن دونوں کی رقوم میں سے ایک ہی مقدار تفریق کی جائے۔

3.2 تناسب

اگر دونوں نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ مساوی ہوں یعنی $a : b = c : d$ تو چاروں مقداریں a ، b ، c اور d تناسب (Proportion) میں کہلاتی ہیں۔ مقداریں a ، b ، c اور d متناسب (Proportionals) کہلاتی ہیں۔

a ، b ، c اور d کو بالترتیب پہلا متناسب ، دوسرا متناسب، تیسرا متناسب اور چوتھا متناسب کہتے ہیں۔

$a : b = c : d$ کو یوں $a : b :: c : d$ لکھتے ہیں اور "نسبت a سے b اور نسبت c سے برابر ہیں" پڑھتے ہیں۔

تناسب $a : b = c : d$ میں ہم a اور d کو طرفین (Extremes) اور b اور c کو وسطین (Means) کہتے ہیں۔

اگر چاروں مقداریں تناسب میں ہوں تو طرفین کا حاصل ضرب وسطین کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ a ، b ، c ، d متناسب ہیں۔

تو تعریف کی رو سے $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ پس $ad = bc$

اِس کے برعکس اگر چار مقداریں a ، b ، c اور d اس طرح ہوں کہ: $ad = bc$ تو a ، b ، c ، d متناسب ہوتے ہیں جبکہ a اور d طرفین ہیں۔ b اور c وسطین ہیں۔

3.3 مسلسل تناسب

اگر $a : b = b : c$ تو مقداریں a ، b اور c مسلسل تناسب (Continued Proportion) میں کہلاتی ہیں۔

یعنی $a : b :: b : c$ یا $ac = b^2$

اس صورت میں b ، a اور c کا وسطی متناسب (Mean Proportional) کہلاتا ہے اور c ، a اور b کا تیسرا متناسب کہلاتا ہے۔

اگر تین مقداریں متناسب ہیں تو پہلی اور تیسری کی نسبت، پہلی اور دوسری کی دُگنی نسبت (Duplicate Ratio) کے برابر ہوتی ہے۔

فرض کیجیے کہ تین مقداریں a ، b ، c مسلسل تناسب میں ہیں۔

اس لیے
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

پس
$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

یعنی
$$a : c = a^2 : b^2$$

مثال 1. 7 , 10 , 21 کا چوتھا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ مطلوبہ چوتھا متناسب x ہے۔ تو

$$7 : 10 = 21 : x$$

یا $7x = 210$

یا $x = 30$

مثال 2. 4 اور 6 کا تیسرا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ مطلوبہ تیسرا متناسب x ہے۔ تو

$$4 : 6 = 6 : x$$

یا $4x = 36$

یا $x = 9$

مثال 3. 8 اور 18 کا وسطی متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ مطلوبہ وسطی متناسب x ہے۔ تو

$$8 : x = x : 18$$

یا $x^2 = 8 \times 18$

یا $x^2 = 144$

یا $x = 12$

مثال 4. ذوالفقار اور رشیدہ کی موجودہ عمروں کی نسبت 7 : 8 ہے۔ 27 سال پہلے اُن کی عمروں کی نسبت 4 : 5 تھی۔ اُن کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ ذوالفقار اور رشیدہ کی عمریں بالترتیب $8x$ اور $7x$ سال ہیں۔

دی گئی شرط کے مطابق

$$8x - 27 : 7x - 27 = 5 : 4$$

یا $4(8x - 27) = 5(7x - 27)$

مختصر کرنے سے

$$3x = 27$$

یا $x = 9$

پس ذوالفقار کی عمر 72 سال اور رشیدہ کی عمر 63 سال ہے۔

مثال 5. اگر $x : y = y : z$ تو $\frac{xyz\,(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$ کی سادہ ترین شکل میں قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے علم میں ہے کہ $x : y = y : z$

لہٰذا $xz = y^2$

پس
$$\frac{xyz\,(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} = \frac{y^3\,(x+y+z)^3}{(xy+yz+y^2)^3}$$
$$= \frac{y^3\,(x+y+z)^3}{y^3\,(x+y+z)^3} = 1$$

3.4 تغیر

روزمرہ زندگی میں ہمیں ایسی مقداروں سے واسطہ پڑتا ہے جن کی قیمتیں تبدیل ہوتی رہتی ہیں یعنی وہ مستقل قیمت نہیں رکھتیں بلکہ مختلف اوقات یا مقامات پر قیمت مختلف ہوتی ہے۔ مثلاً درجہ حرارت، اشیائے صرف کی قیمتیں، سالانہ بارش کی مقدار، کسی صوبے کے اناج کی پیداوار، کسی ملک کی آبادی وغیرہ وغیرہ۔ اِن مقداروں کی اس قسم کی تبدیلیوں کو تغیر (*Variation*) کہتے ہیں۔ تغیرات دو اقسام کے ہوتے ہیں۔

(1) تغیر راست (*Direct Variation*) (2) تغیر معکوس (*Inverse Variation*)

3.4.1 تغیر راست

اگر دو مقداریں x اور y اس طرح مربوط ہوں کہ x کی قیمت میں اضافہ (یا کمی) سے y کی قیمت میں اِسی نسبت سے اضافہ (یا کمی) ہو۔ تو اِن مقداروں x اور y میں تغیر راست ہے۔

دو مقداروں y اور x کے درمیان تغیر راست کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں:

$$y \propto x$$
یا $y = kx$

$\propto$ تغیر کی علامت ہے یہ واضح رہے کہ x اور y کی نسبت ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔ جسے تغیر کا مستقل (*Constant of hariact*) کہتے ہیں۔ اسے عموماً k سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 1. اگر y , x کے تغیر راست ہو اور جب $x = 2$ ہو تو $y = 12$ ہے اگر $x = 9$ ہو تو y معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ y , x کے تغیر راست ہے یعنی $y \propto x$

لہٰذا $y = kx$

جبکہ k ایک مستقل ہے۔

ہمارے علم میں ہے کہ اگر $x = 2$ ہو تو $y = 12$ ہے۔

اس لیے $12 = k \times 2$

$\Rightarrow \quad k = 6$

اب $y = kx$ میں $k = 6$ اور $x = 9$ رکھنے سے

$$y = 6 \times 9 = 54$$

مثال 2. اگر $x \propto y^2$ اور جب $y = 5$ ہو تو $x = 2$ ہے اگر $y = 10$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $x \propto y^2$

لہٰذا $y = ky^2$

ہم جانتے ہیں کہ اگر $y = 5$ ہو تو $x = 2$ ہے۔

اس لیے $2 = k(5)^2$

یا $k = \frac{2}{25}$

اب $x = ky^2$ میں $k = \frac{2}{25}$ اور $y = 10$ رکھنے سے

$$x = \frac{2}{25} \times (10)^2 = \frac{2}{25} \times 10 \times 10 = 8$$

پس $x = 8$

مثال 3. ایک سال میں کسی سیارے کی سورج کے گرد گردش کے وقت کے مربع اور سورج سے اس کے فاصلے کے مکعب میں تغیر راست ہے۔ فرض کیجیے کہ زمین اور زہرہ کا سورج سے فاصلہ بالترتیب $91\frac{1}{4}$ اور 66 ملین میٹر ہے تو سیارہ زہر کی گردش کا وقت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ p گردشی وقت ہے جسے دنوں میں لیا گیا ہے اور q فاصلہ ہے جسے ملین میٹر میں لیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $p^2 \propto d^3$

یا $p^2 = kd^3 \quad .....(i)$

مساوات (i) میں k مستقل ہے۔

چونکہ سورج سے زمین کا فاصلہ $91\frac{1}{4}$ ملین میٹر ہے اور وہ سورج کے گرد 365 دنوں میں گردش مکمل کرتی ہے۔ لہٰذا زمین کے لیے مساوات (i) کی رو سے

$$(365)^2 = k(91\frac{1}{4})^3$$

$$k = \frac{(365)^2}{(91\frac{1}{4})^3} = \frac{365 \times 365}{(\frac{365}{4})^3}$$ یا

$$= \frac{365 \times 365 \times 4 \times 4 \times 4}{365 \times 365 \times 365} = \frac{64}{365}$$

چونکہ سورج سے زہرہ کا فاصلہ 66 ملین میٹر ہے۔ لہٰذا زہرہ کے لیے مساوات (i) کی رو سے

$$p^2 = k\,(66)^3 = \frac{64}{365} \times (66)^3$$

$$p = \sqrt{\frac{4 \times 4 \times 4 \times 66 \times 66 \times 66}{365}} = 4 \times 66 \times \sqrt{\frac{4 \times 66}{365}}$$

$$= 264 \times \sqrt{\frac{264}{365}} = 264 \times \sqrt{0.7233}$$ (تقریباً)

$$= 264 \times 0.85 = 224.5$$

پس سیارہ زہرہ سورج کے گرد تقریباً $224\frac{1}{2}$ دنوں میں گردش مکمل کرتا ہے۔

3.4.2 تغیر معکوس

اگر دو متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسرے کی مقدار میں کمی (یا اضافہ) کا باعث بنے تو ہم کہتے ہیں ان متغیرات میں تغیر معکوس ہے۔

مثلاً اگر 6 آدمی ایک کام کو 8 دنوں میں کرتے ہیں تو 3 آدمیوں کو وہی کام کرنے کے لیے 16 دن درکار ہوں گے اور 12 آدمی 4 دنوں میں اس کام کو ختم کریں گے۔ اس سے یہ واضح ہوتا ہے اگر آدمیوں کی تعداد دُگنی کردیں تو دنوں کی مطلوبہ تعداد آدھی رہ جائے گی۔ اس کے برعکس بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ تو ہم کہہ سکتے ہیں دنوں کی تعداد اور آدمیوں کی تعداد میں تغیر معکوس ہے۔

اگر x اور y کوئی سے دو متغیرات ہوں اور آپس میں اس طرح مربوط ہوں کہ جب x کی قیمت میں کمی ہو تو y کی قیمت میں اضافہ ہو جائے تو x اور y کے درمیان تغیر معکوس کہلاتا ہے جسے ہم لکھتے ہیں:

$$y \propto \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$ یا

$$xy = k$$ یا

جبکہ k ایک مستقل ہے۔

مثال 1. اگر $x \propto \frac{1}{y}$ اور جب $x = 15$ ہو تو $y = 4$ تو اگر $x = 6$ ہو تو y معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ

$$x \propto \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{k}{y}, \forall k \in R \qquad \text{......... (i)}$$

اگر $x = 15$ اور $y = 4$ تو مساوات (i) کی رو سے

$$15 = k \times \frac{1}{4}$$

یا $k = 60$

مساوات (i) میں $x = 6$ اور $k = 60$ رکھنے سے y کی قیمت حاصل ہوگی۔

$$6 = \frac{60}{y}$$

یا $y = \frac{60}{6} = 10$

مثال 2. x کے جذرالمکعب اور y کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $y = 3$ ہو تب $x = 8$ تو اگر $y = 1\frac{1}{2}$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\sqrt[3]{x} \propto \frac{1}{y^2}$

لہٰذا $\sqrt[3]{x} = \frac{k}{y^2}$

جبکہ k ایک مستقل ہے۔

اس مساوات میں $x = 8$ اور $y = 3$ رکھنے سے k کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

لہٰذا $\sqrt[3]{8} = \frac{k}{3^2}$

یا $k = 18$

اب x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے $k = 18$ اور $y = 1\frac{1}{2}$ مساوات $\sqrt[3]{x} = \frac{k}{y^2}$ میں رکھنے سے

$$\sqrt[3]{x} = \frac{18}{(1\frac{1}{2})^2} = \frac{18}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{18}{\frac{9}{4}} = \frac{18 \times 4}{9} = 8$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = 8^3$$

$$\therefore \quad x = 512$$

مشق 3.1

1- کونسی نسبت بڑی ہے:

(i) $5:6$ یا $11:12$ (ii) $22:27$ یا $32:45$

2- مندرجہ ذیل نسبتوں کو یکجا کیجیے۔

(i) $3:5$ ، $9:7$ اور $15:28$

(ii) $a+x:a-x$ ، $(a^2+x^2):(a+x)^2$ اور $(a^4-x^4):(a^2-x^2)^2$

(iii) $2a:3b$ اور $9b^2:ab$ کی دُگنی نسبت

3- اگر $5:8$, $x+7:2(x+14)$ کی دُگنی نسبت ہو تو x معلوم کیجیے۔

4- دو اعداد معلوم کیجیے جن کی نسبت $7:12$ اس طرح ہے کہ بڑا عدد چھوٹے عدد سے 275 زیادہ ہے۔

5- نسبت $27:5$ کی ہر رقم میں کیا جمع کریں کہ یہ $3:1$ کے برابر ہو جائے۔

6- دو اعداد کی نسبت $7:8$ ہے اور اُن کا مجموعہ 105 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

7- دو اعداد کی نسبت $11:13$ ہے اور اُن کا فرق 12 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

8- دو اعداد کی نسبت $3:5$ ہے۔ اگر ہر رقم میں 11 جمع کیا جائے تو مجموعوں کی نسبت $13:18$ ہوتی ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

9- a کی کس قیمت کے لیے نسبت $19+a:23+a$ نسبت $4:5$ کے برابر ہوگی۔

10- مندرجہ ذیل کا چوتھا متناسب معلوم کیجیے۔

(i) 3 ، 5 ، 12 (ii) 8 ، 4 ، 2

11- مندرجہ ذیل کا تیسرا متناسب معلوم کیجیے۔

(i) 6 ، 4 (ii) 3 ، 6

12- مندرجہ ذیل کا وسطی متناسب معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{1}{3}$ ، 27 (ii) 14 ، 56

13- چار اعداد معلوم کیجیے وہ اِس طرح متناسب ہیں کہ اُن کا مجموعہ 40 ہے، تیسرے سے چوتھے کی نسبت $3:5$ ہے اور دوسرے اور چوتھے کا فرق 5 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

14- چار اعداد معلوم کیجیے وہ اِس طرح متناسب ہیں کہ طرفین کا حاصل ضرب 200 ہے، دوسرے اور پہلے کی نسبت $2:1$ ہے اور دوسرے اور چوتھے کی نسبت $1:4$ ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

15۔ تین اعداد اس طرح مسلسل تناسب میں ہیں کہ اُن کا مجموعہ 13 اور حاصل ضرب 27 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

16۔ اگر y , x کے تغیر راست ہے اور اگر $y = 15$ ہو تو $x = 9$ ہے اگر $y = 10$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

17۔ اگر y , x کے تغیر معکوس ہے اور اگر $y = 3$ ہو تو $x = 7$ ہے اگر $y = 2\frac{1}{3}$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

18۔ (i) اگر $A \propto B$ تو ثابت کیجیے کہ $B \propto A$

(ii) اگر $A \propto B$ اور $B \propto C$ تو ثابت کیجیے کہ $A \propto C$

(iii) اگر $A \propto B$ اور $B \propto C$ تو ثابت کیجیے کہ $A + B \propto C$, $A - B \propto C$ اور $\sqrt{AB} \propto C$

19۔ اگر $y = A + B$ جبکہ $A \propto x$ اور $B \propto x^2$ اور اگر $x = 1$ ہو تو $y = 4$ ؛ اور $x = 2$ ہو تو $y = 10$ ، تو x اور y کے درمیان ربط معلوم کیجیے اور اگر $x = 3$ تو y معلوم کیجیے۔

3.5 k کا طریقہ اور تناسب سے متعلق مسائل (K- Method and Theorems on Proportion)

جب دو یا دو سے زیادہ نسبتیں برابر ہوں تو ان مساوی نسبتوں میں سے ہر ایک کو علامت k سے ظاہر کرتے ہوئے بہت سے مفید تناسب ثابت کیے جاسکتے ہیں۔ ہر نسبت کے لیے علامت k استعمال کرنے کے اس طریقے کو k کا طریقہ کہتے ہیں۔ k کا طریقہ بہت سے سوالات حل کرنے میں بہت ہی مفید ہے۔ مندرجہ ذیل اہم مسائل کے ثبوت k کے طریقے کی وضاحت کریں گے۔

3.5.1 تناسب سے متعلق مسائل

مندرجہ ذیل مسائل بہت اہم ہیں اور ان کے بہت زیادہ استعمال کی وجہ سے طلباء سے یہ توقع کی جاتی ہے کہ اِن نتائج کو یاد کریں۔

مسئلہ 3.1 اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ان کسور میں سے ہر ایک $\frac{la + mc + ne}{lb + md + nf}$ کے برابر ہوتا ہے جبکہ l , m اور n کوئی سے حقیقی اعداد ہیں۔ جو کہ بیک وقت صفر نہیں ہے۔

ثبوت: فرض کیا کہ
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

تو
$$a = bk, c = dk, e = fk$$

$$\therefore \frac{la + mc + ne}{lb + md + nf} = \frac{lbk + mdk + nfk}{lb + md + nf} = \frac{k\,(lb + md + nf)}{lb + md + nf}$$

$$\Rightarrow \frac{la + mc + ne}{lb + md + nf} = k$$

نتیجہ صریح: مندرجہ بالا مسئلہ میں $l = m = n = 1$ رکھنے سے

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

اس نتیجے کو تناسب کی کسی بھی تعداد تک بڑھایا جاسکتا ہے۔ عموماً اگر

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ تو ہر ایک $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$ کے برابر ہوتی ہے۔

مسئلہ 3.2 اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو اِن کسور میں ہر ایک $\sqrt{\frac{la^2+mc^2+ne^2}{lb^2+md^2+nf^2}}$ کے برابر ہوتا ہے جبکہ l ، m اور n کوئی سے حقیقی اعداد ہیں۔ جو کہ بیک وقت صفر نہیں ہے۔

ثبوت: فرض کیا کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

تو $a = bk$, $c = dk$, $e = fk$

$$\sqrt{\frac{la^2+mc^2+ne^2}{lb^2+md^2+nf^2}} = \sqrt{\frac{lb^2k^2+md^2k^2+nf^2k^2}{lb^2+md^2+nf^2}}$$

$$= k\sqrt{\frac{lb^2+md^2+nf^2}{lb^2+md^2+nf^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{la^2+mc^2+ne^2}{lb^2+md^2+nf^2}} = k$$

نتیجہ صریح: مندرجہ بالا مسئلہ میں $l = m = n = 1$ رکھنے سے

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \sqrt{\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}}$$

مسئلہ 3.1 کی طرح اس نتیجے کو بھی تناسب کی کسی بھی تعداد تک بڑھایا جاسکتا ہے۔ عموماً اگر

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ تو ہر ایک $\sqrt{\frac{a^2+c^2+e^2+\cdots}{b^2+d^2+f^2+\cdots}}$ کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 1. اگر $\frac{y-z}{x} = \frac{y-z}{x} = \frac{x-y}{z}$ تو $x = y = z$ ہوں گے جبکہ $x+y+z \neq 0$

حل: مسئلہ 3.1 کی روسے $l = m = n = 1$ لیتے ہوئے

$$\text{ہر کسر} = \frac{x-y+y-z+z-x}{x+y+z} = \frac{0}{x+y+z}$$

پس ہر کسر $= 0$

اگر $x+y+z \neq 0$ تو $\frac{x-y}{z}=0$

یا $x-y=0$

یا $x=y$

اِس طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $y=z$ یا $z=x$

یعنی $x=y=z$

مثال 2. اگر $\frac{2x-y}{x+3y}=\frac{5y-x}{x-3y}=\frac{2y+x}{2(x-1)}$ تو ثابت کیجیے کہ ہر کسر y کے برابر ہے۔

حل: مسئلہ 3.1 کی رو سے $l=m=1$ اور $n=-1$ لیتے ہوئے

ہر کسر $=\frac{2x-y+5y-x-x-2y-x}{x+3y+x-3y-2x+2}=\frac{2y}{2}=y$

مثال 3. مساواتوں $3x=4y$ اور $2x-y=5$ کو حل کیجیے۔

حل: $3x=4y \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y}{3}$

مسئلہ 3.1 کی رو سے $l=2$, $m=-1$ لیتے ہوئے

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{2x-y}{8-3}=\frac{2x-y}{5}=\frac{5}{5}=1 \quad (\because 2x-y=5)$$

$$\therefore\ x=4\ ,\ y=3$$

مثال 4. اگر $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ تو ثابت کیجیے۔

$$\frac{x^3}{a^2}=\frac{y^3}{b^2}=\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

حل: فرض کیجیے کہ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$

لہٰذا $x=ak\ ,\ y=bk\ ,\ z=ck$

اب

$$\frac{x^3}{a^2}=\frac{y^3}{b^2}=\frac{z^3}{c^2}=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}$$

$$=ak^3+bk^3+ck^3$$

$$=k^3(a+b+c) \quad \text{... (i)}$$

$$\text{R.H.S}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=k^3(a+b+c) \quad \text{... (ii)}$$

(i) اور (ii) کی رو سے

$$\frac{x^3}{a^2} = \frac{y^3}{b^2} = \frac{z^3}{c^2} = \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

مثال 5. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کیجیے $\frac{a^3b + 2c^2e - 3ae^2f}{b^4 + 2d^2f - 3bf^3} = \frac{ace}{bdf}$

حل: فرض کیا کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

تو $a = bk \, , c = dk \, , e = fk$

$$\therefore \frac{a^3b + 2c^2e - 3ae^2f}{b^4 + 2d^2f - 3bf^3} = \frac{b^4k^3 + 2d^2fk^3 - 3bf^3k^3}{b^4 + 2d^2f - 3bf^3}$$

$$= k^3 = k \, . \, k \, . \, k$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

$$= \frac{ace}{bdf}$$

مشق 3.2

1- اگر $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ اور $a+b+c \neq 0$ تو ثابت کیجیے کہ $a = b = c$

2- اگر $\frac{a+b}{x+y} = \frac{b+c}{y+z} = \frac{c+a}{z+x}$ تو ثابت کیجیے اِن میں ہر ایک $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ کے برابر ہے۔

3- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کیجیے $(a^2 + c^2 + e^2)(b^2 + d^2 + f^2) = (ab + cd + ef)^2$

4- اگر $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ تو ان نسبتوں میں سے ہر ایک 1 کے برابر ہے جبکہ $x+y+z \neq 0$

5- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کیجیے کہ $\frac{a^4b^2 + a^2e^2 - e^4f}{b^6 + b^2f^2 - f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

6- اگر $x : y = a : b - a$ تو ثابت کیجیے کہ $x^2 + xy + y^2 : a^2 - ab + b^2 = x^2 : a^2$

7- اگر $\frac{a}{y+z} = \frac{b}{z+x} = \frac{c}{x+y}$ تو ثابت کیجیے کہ $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$

3.6 تناسب کے خواص

(1) اگر $a:b=c:d$ تو $ad=bc$ اور اس کے برعکس اگر $ad=bc$ تو a, b, c, d متناسب ہیں۔

چونکہ
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
دونوں اطراف bd سے ضرب کرنے سے
$$ad=bc$$
اسی طرح چونکہ
$$ad=bc$$
دونوں اطراف bd سے تقسیم کرنے سے
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

(2) اگر $a:b=b:c$ تو $a:c=a^2:b^2$

چونکہ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ لہذا $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$

پس
$$a:c=a^2:b^2$$

نوٹ: نسبت $a^2:b^2$ ، $a:b$ کی دُگنی نسبت کہلاتی ہے۔

(3) اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$ **(خاصیت عکس نسبت)**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$
یعنی
$$b:a=d:c$$

(4) اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$ **(خاصیت تبدیل نسبت)**

چونکہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ لہذا $ad=bc$ (دونوں اطراف کو cd سے تقسیم کرنے سے)
$$\Rightarrow\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$
یعنی
$$a:c=b:d$$

(5) اگر $a:b=c:d$ تو $a+b:b=c+d:d$ **(خاصیت ترکیب نسبت)**

چونکہ
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$
$$\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$
یعنی
$$a+b:b=c+d:d$$

(6) اگر $a : b = c : d$ تو $a - b : b = c - d : d$ (خاصیت تفصیل نسبت)

چونکہ
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$
$$\Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

یعنی
$$a - b . b = c - d : d$$

(7) اگر $a : b = c : d$ تو $a + b : a - b = c + d : c - d$ (خاصیت ترکیب وتفصیل نسبت)

(5) اور (6) کی رو سے
$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ اور } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{b} \div \frac{a-b}{b} = \frac{c+d}{d} \div \frac{c-d}{d}$$

یا
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

(8) اگر $a : b = x : y$ اور $b : c = y : z$ تو $a : c = x : z$

چونکہ
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \text{ اور } \frac{b}{c} = \frac{y}{z}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{x}{y} \times \frac{y}{z}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{x}{z}$$

یعنی
$$a : c = x : z$$

اِسے مختصر طور پر $a : b : c = x : y : z$ لکھتے ہیں۔

مثال 1. اگر $a : b = c : d$ تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{ac + bd}{ac - ba}$

حل: چونکہ
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

دونوں اطراف $\frac{a}{b}$ سے ضرب کرنے سے
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$$

خاصیتِ ترکیب وتفصیل نسبت کی رو سے
$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{ac + bd}{ac - bd}$$

مثال 2. اگر $a : b :: c : d$ تو $(ma + nb) : (ma - nb) = (mc + nd) : (mc - nd)$

حل: چونکہ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$$

خاصیت ترکیب وتفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{ma + nb}{ma - nb} = \frac{mc + nd}{mc - nd}$$

یعنی $(ma + nb) : (ma - nb) = (mc + nd) : (mc - nd)$

مثال 3. حل کیجیے: $\dfrac{(x-4)^3 - (x-3)^3}{(x-4)^3 + (x-3)^3} = \dfrac{63}{65}$

حل: چونکہ

$$\frac{(x-4)^3 - (x-3)^3}{(x-4)^3 + (x-3)^3} = \frac{63}{65}$$

خاصیت ترکیب وتفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{2(x-4)^3}{-2\,(x-3)^3} = \frac{63 + 65}{63 - 65}$$

یا $$\frac{(x-4)^3}{-(x-3)^3} = \frac{128}{-2}$$

یا $$\frac{(x-4)^3}{(x-3)^3} = 64$$

یا $$\left\{\frac{(x-4)}{(x-3)}\right\}^3 = (4)^3$$

جذرالمکعب لینے سے

$$\frac{x-4}{x-3} = 4$$

$$\Rightarrow x - 4 = 4\,(x-3)$$

$$\Rightarrow x - 4 = 4x - 12$$

$$\Rightarrow 3x = 8$$

یا $$x = \frac{8}{3}$$

مشق 3.3

اگر $a : b :: c : d$ تو ثابت کیجیے۔

1. $c^2 : d^2 = (a^2 + c^2) : (b^2 + d^2)$
2. $ac : bd = (a^2 + c^2) : (b^2 + d^2)$
3. $\dfrac{a^2 - c^2}{ac} = \dfrac{b^2 - d^2}{bd}$
4. $a^2 : b^2 = 3a^2 + 5c^2 : 3b^2 + 5d^2$
5. $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{ma + nb}{mc + nd} = \dfrac{b^2}{d^2}$
6. $\dfrac{a}{(a+b)(a+c)} = \dfrac{1}{a+b+c+d}$
7. $a + \dfrac{1}{b} : b + \dfrac{1}{a} = c + \dfrac{1}{d} : d + \dfrac{1}{c}$

8۔ اگر a , b اور c مسلسل تناسب میں ہیں تو ثابت کیجیے:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = a - b + c$$

x کے لیے مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

9. $\dfrac{(x+3)^2 + (x-1)^2}{(x+3)^2 - (x-1)^2} = \dfrac{5}{4}$
10. $\dfrac{x^2 + 16x + 63}{x^2 + 6x + 8} = \dfrac{x^2 + 16x + 60}{x^2 + 6x + 5}$
11. $\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-6)(x-10)} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-7)(x-9)}$
12. $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{3x - 5} = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 3}$
13. $\dfrac{\sqrt{x+10} - \sqrt{x-10}}{\sqrt{x+10} + \sqrt{x-10}} = \dfrac{1}{5}$
14. $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \dfrac{4x-1}{2}$

3.7 عبارتی سوالات

مثال 1. ایک ادارے کے اخراجات کا کچھ حصہ مستقل اور ادارے میں مقیم افراد کی وجہ سے اِس کا کچھ حصہ متغیر ہے۔ اگر مقیم افراد 220 اور 250 ہوں تو اخراجات بالترتیب 13,500 روپے اور 15,000 روپے ہوتے ہیں۔ 300 مقیم افراد کے لیے اخراجات معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ مستقل اخراجات m روپے ہیں اور کُل اخراجات p روپے اور مقیم افراد کی تعداد x ہے۔

دی گئی شرط کے مطابق $p = m + nx$

جبکہ n ایک مستقل ہے جو x پر فی کس اخراجات کو ظاہر کرتا ہے۔

لہٰذا
$$13500 = m + 220n \quad \cdots (1)$$
$$15000 = m + 250n \quad \cdots (2)$$
$$p = m + 300n \quad \cdots (3)$$

(1) اور (2) کی رو سے
$$1500 = 30n$$
$$n = 50$$
اور $m = 2500$

m اور n کی قیمتیں (3) میں رکھنے سے
$$p = 2500 + 300 \times 50$$
یا $p = 17500$

پس 300 مقیم افراد کے لیے 17500 روپے کے اخراجات ہوئے۔

مثال 2: قائم دائروی مخروط (Right Circular Cone) کا حجم، قاعدے کے رداس کے مربعے کے تغیر راست ہے جبکہ اونچائی مستقل ہے اور اونچائی کے تغیر راست ہے جبکہ قاعدہ مستقل ہے۔ اگر قاعدے کا رداس 7 سم اور اونچائی 15 سم ہو تو حجم 770 مکعب سم ہوتا ہے۔ اگر اُس کا حجم 132 مکعب سم ہے اور اُس کے قاعدے کا رداس 3 سم ہو تو مخروط کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ اونچائی اور قاعدے کا رداس بالترتیب h اور r ہے۔ جنھیں سینٹی میٹر میں ناپا گیا ہے اور فرض کیا کہ V مکعب سم میں حجم ہے۔

دی گئی شرط کے مطابق $V \propto r^2 h$
$$\Rightarrow \quad v = mhr^2$$
جبکہ m ایک مستقل ہے۔
$$\therefore \quad 770 = m(7)^2(15)$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{22}{21}$$

$V = mr^2h$ میں $m = \frac{22}{21}$، $v = 132$ اور $r = 3$ رکھنے سے
$$132 = \frac{22}{21} \times (3)^2 \times h$$
$$\Rightarrow \quad h = 14$$

پس اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 3. کون سا عدد 4 , 5 , 6 اور 8 میں سے تفریق کیا جائے کہ چاروں اعداد متناسب ہو جائیں؟

حل: فرض کیجیے کہ x مطلوبہ عدد ہے تو

$$\frac{4-x}{5-x} = \frac{6-x}{8-x}$$

یا $$(4-x)(8-x) = (6-x)(5-x)$$

یا $$32 - 4x - 8x + x^2 = 30 - 6x - 5x + x^2$$

یا $$32 - 12x = 30 - 11x$$

یا $$x = 2$$

پس مطلوبہ عدد 2 ہے۔

مثال 4. مثلث کے زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے جبکہ ان کی مقداریں 3 , 4 اور 5 کے متناسب ہیں۔

حل: فرض کیجیے کہ مثلث کے زاویوں کی مقداریں x , y اور z ہیں تو

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$$

اس لیے $$x = 3k\,,\ y = 4k\,,\ z = 5k$$

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے یعنی

$$x + y + z = 180$$

یا $$3k + 4k + 5k = 180$$

یا $$12k = 180$$

یا $$k = 15$$

لہٰذا $$x = 3 \times 15 = 45°$$

$$y = 4 \times 15 = 60°$$

$$z = 5 \times 15 = 75°$$

پس مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداریں $45°$ ، $60°$ اور $75°$ ہیں۔

مشق 3.4

1- دائرے کا رقبہ اپنے رداس کے مربعے کے تغیر راست ہے ایسے دائرے کا رداس معلوم کیجیے۔ جس کا رقبہ، دو دائروں کے رقبوں کے مجموعے کے برابر ہے جن کے رداس بالترتیب 5 سم اور 12 سم ہیں۔

2- جب ایک جسم حالتِ سکون سے گرتا ہے تو نقطۂ آغاز سے اس کا فاصلہ اس کے گرنے کے وقت کے مربعے کے تغیر راست ہوتا ہے۔ اگر جسم 5 سیکنڈ میں $402\frac{1}{2}$ فٹ گرتا ہے۔ تو 10 سیکنڈ میں یہ کتنے فاصلہ پر ہوگا؟ نیز دسویں سیکنڈ میں یہ کتنی دور گرتا ہے؟

3- کرہ (sphere) کے حجم اور اس کے رداس کے مکعب میں تغیر راست ہے۔ جب رداس $3\frac{1}{2}$ فٹ ہو تو حجم $179\frac{2}{3}$ مکعب فٹ ہوتا ہے۔ اگر اس کا رداس 1 فٹ 9 انچ ہو تو حجم معلوم کیجیے۔

4- اگر کوئی جسم حالت سکون سے یکساں اسراع a کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے فاصلہ s ، t سیکنڈ میں طے کرتا ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ s ، a اور t کے مربعے کے ایک ساتھ تغیر راست ہوتا ہے۔ اگر جسم 2 میٹر فی مربع سیکنڈ کے اسراع کے ساتھ حرکت ہوئے 3 سیکنڈ میں 9 میٹر فاصلہ طے کرتا ہے تو a معلوم کیجیے جبکہ $t = 5$ سیکنڈ اور $s = 75$ میٹر۔

5- مختلف جسامت کی دو تصاویر میں بالکل ایک ہی منظر دکھایا گیا ہے چھوٹی تصویر کی چوڑائی 10 سینٹی میٹر اور اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے اور بڑی تصویر کی چوڑائی 15 سینٹی میٹر اور اونچائی 21 سینٹی میٹر ہے بڑی تصویر میں موجود ایک درخت کی اونچائی 12 سینٹی میٹر ہے چھوٹی تصویر میں اسی درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

6- اگر نسبت $a : b$ کی رقوم میں بالترتیب x اور y جمع کیا جائے تو نسبت $a : b$ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ ثابت کیجیے $x : y = a : b$

7- ایک مثلث کے اضلاع کے مقداریں 6 ، 11 اور 15 سینٹی میٹر ہیں اسی مثلث کے متشابہ مثلث کا احاطہ 160 سینٹی میٹر ہے اس کے اضلاع کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8- ایک مثلث کا احاطہ 176 ڈیسی میٹر ہے۔ اس کے اضلاع $2 : 4 : 5$ کے متناسب ہیں۔ اس کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

متفرق مشق II

1۔ ثابت کیجیے کہ 5 : 4 کی دُگنی نسبت، 16 : 25 کی ذیلی دُگنی نسبت اور 5 : 4 کے ضربی معکوس کو یکجا کر کے نسبت 1 حاصل ہوتی ہے۔

2۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا صحیح عدد معلوم کیجیے جسے جب 6 : 5 کی دونوں رقوم سے تفریق کیا جائے تو حاصل ہونے والی نسبت 18 : 13 سے چھوٹی ہوگی۔

3۔ اگر 2 : 1 کی رقوم میں سے x تفریق کرنے سے اس کی دُگنی نسبت حاصل ہو تو x معلوم کیجیے۔

4۔ چار ایسے متناسب اعداد معلوم کیجیے جبکہ طرفین کا مجموعہ 21 ہے، وسطین کا مجموعہ 19 ہے اور چاروں اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 442 ہے۔

5۔ اگر $a - c : b - c$ کی دُگنی نسبت $a : b$ ہو جبکہ a اور b برابر نہ ہوں تو c، a اور b کا وسطی متناسب ہے۔

6۔ (i) اگر $7x + 5y = 4x + 3y$ تو ثابت کیجیے $x \propto y$

(ii) اگر $x^2y^2 + 1 = 2xy$ تو ثابت کیجیے x، y کے تغیر معکوس ہے۔

7۔ (i) اگر $a : b = 6 : 7$ تو $7a + 10b = 18b - 7a$ معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $x : y = 3 : 4$ تو $4x - 3y : 12x - 3y$ معلوم کیجیے۔

(iii) اگر $\frac{5a^2 + 7b^2}{3a^2 - b^2} = 1\frac{40}{47}$ تو $a : b$ معلوم کیجیے۔

8۔ اگر $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2b-c}{2b+c} = \frac{c-2a}{c+2a}$ تو ثابت کیجیے ہر ایک نسبت صفر کے برابر ہے جب تک کہ $2a + 2b + c = 0$

9۔ اگر $x = p + q$ جبکہ $P \propto y^2$ اور $q \propto \frac{1}{y}$ تو x اور y میں مساوات معلوم کیجیے جب اگر $y = 1$ تو $x = 7$ اور جب $x = 14$ ہو تو $y = 2$ ہے۔

10۔ اگر ایک کرہ کا حجم اس کے رداس کے مکعب کے تغیر راست ہے تو ایسے کرہ کا رداس معلوم کیجیے جس کا حجم تین کروں کے حجم جن کے رداس بالترتیب 3 فٹ، 4 فٹ اور 5 فٹ ہیں، کے مجموعے کے برابر ہے۔

11۔ اگر 10 آدمی 160 ایکڑ پر اُگی ہوئی فصل کو 18 دن میں کاٹتے ہیں تو 15 آدمی 180 ایکڑ پر اُگی ہوئی فصل کو کتنے دن میں کاٹیں گے ؟

12۔ اگر 18 کمپوزیٹر 8 دن میں 24 صفحات مکمل کرتے ہیں تو اُسی قابلیت کے 45 کمپوزیٹر 14 دن میں کتنے صفحات مکمل کریں گے ؟

13۔ باپ اور بیٹے کی عمریں 3 : 10 کے متناسب ہیں۔ 8 سال کے بعد ان کی عمروں میں 5 : 12 کی نسبت ہوگی۔ دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

14۔ ایک باپ کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کا دگنا ہے 8 سال پہلے ان کی عمروں میں 3 : 8 کی نسبت تھی۔ دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

15۔ خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) 3 : 2 کی دگنی نسبت ______ ہے۔

(ii) 9 : 4 کی ذیلی دگنی نسبت ______ ہے۔

(iii) یکساں قسم کی دو مقداروں کے ربط کو ______ کہتے ہیں۔

(iv) اگر $A \propto B$ اور $B \propto C$ تو ______ $A \times$

(v) نسبتیں $a : b$ اور $b : a$ ایک دوسرے کا ______ کہلاتی ہیں۔

16۔ صحیح بیان کے لیے T اور غلط بیان کے لیے F لکھیے۔

(i) 3 : 2 اور 7 : 5 یکجا کرنے سے حاصل ہونے والی نسبت 4 : 3 ہے۔

(ii) 81 : 64 کی ذیلی دُگنی نسبت 9 : 8 ہے۔

(iii) نسبت 28 : 15 نسبت 29 : 16 سے بڑی ہے۔

(iv) تناسب کے وسطین کا حاصل ضرب، طرفین کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

(v) اگر $a : b = c : d$ تو $c - b : b = c + d : d$

(vi) ایک جیسی رقوم کی دو مقداروں کا ربط نسبت کہلاتا ہے۔

(vii) اگر $a : b$ تو $a - x : x - b$

(viii) اگر $2 : 3 = a + 3 : 2 - a$ تو $a = 1$

17۔ صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) نسبت $a^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}$ ________ کی ذیلی دُگنی نسبت کہلاتی ہے۔

(a) $a : b$　(b) $a^3 : b^3$　(c) $a^2 : b^2$　(d) اِن میں سے کوئی نہیں

(ii) اگر $x + 5 : x + 7 = 5 : 7$ تو x ________ کے برابر ہے۔

(a) 0　(b) 1　(c) -1　(d) 2

(iii) اگر a ، b اور c مسلسل تناسب میں ہیں تو ________

(a) $ab = c^2$　(b) $a^2 = bc$　(c) $ac = b^2$　(d) اِن میں کوئی نہیں

(iv) 75 اور 12 کے وسطی متناسب ________ ہیں۔

(a) ± 20　(b) ± 10　(c) ± 30　(d) ± 40

(v) اگر $a : b = c : d$ تو $a : c = b : d$ تناسب کی یہ خاصیت ________ کہلاتی ہے۔

(a) تفصیل نسبت　(b) تبدیل نسبت　(c) عکسِ نسبت　(d) ترکیب نسبت

معلومات داری

4.1 تعارف

آیئے سوچیں کہ اِن سوالات کے جوابات کیا ہوسکتے ہیں۔

(i) آئندہ دس سالوں میں کتنے ڈاکٹر، انجینئر، اساتذہ وغیرہ کی ضرورت ہوگی؟

(ii) زراعت پر بارش کے، پیدائش پر شادیوں کی تعداد کے، مریضوں پر دواؤں کے، فروخت پر قیمتوں کے، صحت پر تمباکونوشی کے وغیرہ کیا اثرات ہوتے ہیں؟

حکمت عملی طے کرنے اور مؤثر فیصلے کے لیے معلومات کو اکٹھا کیا جاتا ہے اور توضیح کی جاتی ہے۔ معلومات کو مختصر کرنے کے لیے کچھ ایسے طریقِ کار کی ضرورت ہوتی ہے جو اِسے سمجھنے کے لیے آسان بنادے۔

معلومات پیش کرنے کے ایسے طریقے کو جس سے مفید نتائج حاصل ہوسکیں، معلومات داری (*Information Handling*) کہلاتا ہے۔

4.2 چند تعریفات :

4.2.1 مواد : معلومات جو مقداری یا ماہیتی شکل میں کسی مخصوص خاصیت کی حامل ہو، مواد (*Data*) کہلاتی ہے۔

4.2.2 ڈیٹا سیٹ: مواد جو کسی خاص مقصد کے لیے جمع کیا جائے، ڈیٹا سیٹ یا موادنوع (Data Set) کہلاتا ہے۔

مثال 1. مندرجہ ذیل معلومات موادنوع کی ایک مثال ہے۔

مُلک	پاکستان	بھارت	ایران	ترکی
آبادی (ملین میں)	120	800	100	85

یہاں ڈیٹا سیٹ آبادی کے ساتھ ممالک پر مشتمل ہے۔ جو کہ اس کی خصوصیت ہے۔

4.2.3 متغیر: یہ وہ خصوصیت ہے جو ڈیٹا سیٹ میں مختلف ارکان کے۔ لیے مختلف قیمتیں لے سکتی ہے۔ مثال 1 میں آبادی ایک متغیر (Variable) ہے کیونکہ یہ ہر ملک کے لیے مختلف ہے۔

4.2.4 آبادی: کسی خصوصیت سے متعلق مشاہدات (ارکان) کا مجموعہ شماریاتی آبادی (کائناتی سیٹ کے مترادف) یا صرف آبادی (*Population*) کہلاتا ہے۔

4.2.5 نمونہ (*Sample*): یہ آبادی کا تحتی سیٹ ہے۔

مثال: کسی درس گاہ کے تمام طلباء آبادی تشکیل دیتے ہیں۔ لڑکے اور لڑکیاں اِس آبادی کے دو نمونے (Samples) ہیں۔ اِسی طرح دسویں جماعت، نویں جماعت وغیرہ بھی اِس کے نمونے ہیں۔

4.3 متغیرات کی اقسام

خصوصیت کی بنیاد پر متغیر کی دو اقسام ہیں۔

4.3.1 مقداری متغیر (*Quantitative variables*)

یہ وہ متغیر ہے جس کی خصوصیت کی پیمائش کی جاسکتی ہے یا عددی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر عمر، وزن، قد، آمدنی، لمبائی، حجم، بچوں کی تعداد وغیرہ۔ مقداری متغیر (*Quantitative variables*) دو اقسام کے ہوتے ہیں۔

(i) غیر مسلسل متغیر

یہ وہ متغیر ہے جس کی قیمت مقداروں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔ مثلاً کسی خاندان میں بچوں کی تعداد، کسی محکمے میں ملازموں کی تعداد، کسی کمرے میں افراد کی تعداد وغیرہ۔ غیر مسلسل متغیر (Discrete variable) میں صرف کچھ مخصوص قیمتیں لے سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر چار سکوں کو اُچھالا جائے تو سکوں کے چاند اوپر آنے کی تعداد ایک غیر مسلسل متغیر ہے جس کی قیمت 4,3,2,1,0 میں سے کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

ایسا مواد جو غیر مسلسل متغیر کے ذریعے بیان کیا جائے، غیر مسلسل مواد (Discrete data) کہلاتا ہے۔

(ii) مسلسل متغیر

یہ وہ متغیر ہے جس کی قیمتیں پیمائش پر منحصر ہوتی ہیں۔ مثلاً لمبائیاں، حجم، اوزان، کسی مقام کے درجہ حرارت وغیرہ۔

مسلسل متغیر (Continuous variable) کسی دیئے ہوئے وقفے میں ہر ممکن قیمت لے سکتا ہے۔ یہ مکمل عدد یا کسر ہوسکتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی فرد کی عمر 60 سال ، 60.28 سال ، 60.5345 سال ، وغیرہ ہوسکتی ہے جو کہ پیمائش پر منحصر ہے۔
وہ مواد جو مسلسل متغیر کے ذریعے بیان کہلاتا ہے۔

4.3.2 خاصیتی متغیر (**Qualitative variable**)

یہ وہ متغیر ہے جس کی قیمتیں عددی نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر رنگ، جنس، خاصیت، ذہانت وغیرہ

4.4 مواد کی اقسام

4.4.1 ابتدائی مواد

پہلی مرتبہ یا ابتدائی طور پر اکٹھی کی گئی اصل معلومات جو کہ کسی ترتیب میں نہ ہو، کو ابتدائی مواد (*Primary Data*) کہتے ہیں۔

4.4.2 ثانوی مواد:

اگر مواد کسی اور ذریعے سے حاصل کیا جائے یا کسی شماریاتی مرحلے سے گزر چکا ہو تو اُسے ثانوی مواد (Secondary Data) کہتے ہیں۔

مثال: اگر ہم کسی گاؤں میں 10 خاندانوں کی ہفتہ وار آمدنی کے بارے میں معلومات اکٹھی کرتے ہیں تو مواد اصل شکل میں یہ ہوگا۔

خاندان	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
آمدنی (روپوں میں)	1000	900	1100	700	650	1210	920	845	660	1200

یہ خام مواد (Raw data) یا ابتدائی مواد (اصل شکل میں) کہلاتا ہے۔

لیکن اگر ہم آمدنی کو ترتیب صعودی میں لکھیں تو وہ اس طرح ہوگی۔

1210	1200	1100	1000	920	900	845	700	660	650

ایسا مواد جسے کسی مقصد کے لیے مترتب (یا خاص) شکل میں پیش کیا جائے، ثانوی مواد کہلاتا ہے۔

4.5 مواد کا حصول

ہمارے علم میں ہے کہ مواد نتائج اخذ کرنے اور فیصلے کرنے میں بنیاد فراہم کرتے ہیں۔ اساتذہ اپنے طلباء کی قابلیت کا اندازہ اُن کے نمبروں کی بنیاد پر کرتے ہیں۔ خاندان اپنی آمدنی کی بنیاد پر صحت، تعلیم، کپڑے، کرایہ، آمدورفت، کھانے وغیرہ پر اخراجات کی منصوبہ بندی کرتے ہیں۔

کسی منصوبہ بندی سے پہلے اس سے متعلق مواد اکٹھا کیا جاتا ہے۔ وہ شخص جو مواد اکٹھا کرتا ہے، محقق (Investigator) کہلاتا ہے۔ محقق میں مندرجہ ذیل خصوصیات کا ہونا ضروری ہے۔

(i) ذہین، قابل اعتماد اور ذمہ دار

(ii) تربیت یافتہ اور شائستہ

(iii) تجربہ کار، معاملہ شناس اور جس چیز کے بارے میں کام کر رہا ہو اس سے بخوبی آگاہ ہو

4.6 مواد یا معلومات کو پیش کرنا

مواد کو حاصل کرنے کے بعد اگلا قدم اُسے اس طرح پیش کرنا ہوتا ہے کہ اس کی مکمل تصویر سامنے آ جائے۔

ابتدائی مواد کو جامع اور آسان شکل میں لانے کے لیے جو طریقہ کار اختیار کیا جاتا ہے اُسے جماعت بندی (Classification) اور جدول بندی (Tabulation) کہتے ہیں۔ یہ دونوں طریقہ کار ساتھ ساتھ کام کرتے ہیں۔ جماعت بندی، جدول بندی سے پہلے کی جاتی ہے۔ جدول بندی مواد کی منطقی انداز سے غیر مشترک سیٹوں یا گروہوں میں تقسیم پر انحصار کرتی ہے۔

4.7 جماعت بندی (Classification)

جماعت بندی ایسا عمل ہے جس میں مواد کو ان کی مشاہداتی امتیاز کے مطابق گروہوں میں یکساں خصوصیات کی بنیاد پر ترتیب دے کر لکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اسپتال میں مریضوں کی بیماریوں کے مطابق جماعت بندی کی جاتی ہے۔ کسی جماعت کے طلباء کی اُن کے درجوں (Grades) کے مطابق جماعت بندی کی جاتی ہے وغیرہ۔

4.8 چند تعریفات

4.8.1 گروہی اور غیر گروہی مواد

ضرورت کے مطابق مواد کی کئی گروہوں (سطروں اور کالموں کی صورت میں) میں جماعت بندی کرنے کو گروہی مواد (Grouped Data) کہتے ہیں۔ باصورت دیگر اسے غیر گروہی مواد (Ungrouped Data) کہتے ہیں۔ مثلاً مندرجہ ذیل مواد غیر گروہی ہے۔

25	30	20	2	8	18	15	6	30	28	1	26

اِسی مواد کو مندرجہ ذیل شکل میں لکھنے سے مواد گروہی کہلاتا ہے۔

0 – 10	11 – 20	21 – 30
4	3	5

4.8.2 جماعتوں کی تعداد

جماعتوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے کوئی لگا بندھا اصول نہیں ہے۔ تاہم جماعتوں یا گروہوں کی تعداد 5 اور 15 کے درمیان ہونی چاہیے کیونکہ گروہوں کی بہت کم تعداد ہو تو بہت سی اہم معلومات ضائع کر دیتی ہے اور بہت زیادہ ہو تو مواد کو مختصر کرنے میں زیادہ محنت درکار ہوگی جس کا کوئی فائدہ نہیں ہوتا۔

مثال: ریاضی کے مضمون میں نویں کے 15 طلباء نے ماہانہ امتحان میں 100 میں سے مندرجہ ذیل نمبر حاصل کیے۔

60 , 62 , 65 , 66 , 67 , 68 , 66 , 60 , 73 , 67 , 69 , 70 , 63 , 64 , 63

اِس مواد کی پانچ گروہوں میں مندرجہ ذیل طریقے سے جماعت بندی کی جا سکتی ہے۔

جدول 1

ریاضی میں نمبر	طلباء کی تعداد
60 – 62	3
63 – 65	4
66 – 68	5
69 – 71	2
72 – 74	1
کُل تعداد	15

4.8.3 جماعتوں کی تخصیص (*Specification of Classes*)

حقیقت میں جماعتوں کو لکھنے کے بہت سے طریقے ہیں۔ ہر طریقہ قابل قبول ہے اگر اس میں کوئی ابہام نہ ہو۔ ذیل میں دیے ہوئے ایک جیسے مواد کے لیے جماعتوں کی چند تخصیصات دی گئی ہیں۔

IV	III	II	I
1 اور 10 سے کم	1 – 9.99	1 – 9.9	1 – 10
10 اور 20 سے کم	10 – 19.99	10 – 19.9	11 – 20
20 اور 30 سے کم	20 – 29.99	20 – 29.9	21 – 30
30 اور 40 سے کم	30 – 39.99	30 – 39.9	31 – 40
40 اور 50 سے کم	40 – 49.99	40 – 49.9	41 – 50

4.8.4 جماعتی وقفہ (*Class interval*)

جدول 1 میں (62 – 60) ، (65 – 63) ، (68 – 66) ، (71 – 69) ، اور (74 – 72) جماعتی وقفے ہیں۔ جماعتی وقفہ کی جسامت، وسعت یا لمبائی دراصل اس فرق کو کہتے ہیں جو دو متواتر جماعتوں کی زیریں یا بالائی حدود میں پایا جاتا ہے۔ جسے h سے ظاہر کرتے ہیں۔ مندرجہ بالا مثال کے جدول 1 میں h "3" ہے۔

4.8.5 جماعتی حدود (*Class limits*)

اعداد جماعتوں کو شناخت کرنے میں اہم کردار کرتے ہیں۔ ہر جماعت میں چھوٹے عدد کو زیریں جماعتی حد (*Lower*

(Class Limit) جسے l سے ظاہر کرتے ہیں۔ اور بڑے عدد کو بالائی جماعتی حد (Upper Class Limit) کہتے ہیں جسے u سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر (10–14) ، (15–19) ،(20–24) وغیرہ جماعتیں ہیں تو 10، 15، 20 ، .... زیریں جماعتی حدیں ہیں اور 14 ، 19 ، 24 ، ...... بالائی جماعتی حدیں ہیں۔

4.8.6 جماعتی نشان یا جماعت کا وسطی نقطہ

جماعتی نشان (Class Mark) یا جماعت کا وسطی نقطہ دراصل زیریں اور بالائی جماعتی حدود کی اوسط ہے۔ مثال کے طور پر جدول 1 میں پہلی جماعت کا وسطی نقطہ ہے۔

$$\text{وسطی نقطہ } (x) = \frac{62 + 60}{2} = 61$$

4.8.7 جماعتی تعدد

کسی خاص جماعت میں مشاہدات کی تعداد جماعتی تعدد یا صرف تعدد (Frequency) کہلاتی ہے۔ اِسے f سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر جب ایک سکہ 10 مرتبہ اچھالا جائے چاند والا حصہ (Head) 6 مرتبہ اوپر آئے اور عدد والا حصہ (Tail) 4 مرتبہ آئے تو ہم کہتے ہیں کے چاند والے حصے کا تعدد 6 اور عدد والے حصے کا تعدد 4 ہے۔

4.8.8 حقیقی جماعتی حدود (Class Boundary)

دراصل یہ وہ نقاط ہیں جو ایک جماعت کو اس کی متصل جماعتوں سے جُدا کرتے ہیں۔ حقیقی جماعتی حد ہمیشہ کسی جماعت کی بالائی حد اور اگلی جماعت کی زیریں حد کے وسط میں واقع ہوتی ہے۔

جماعتی حدود سے جماعتی سرحدیں بنانے کا طریقہ:

پہلا قدم: کسی ایک جماعت کی زیریں ، اور اس سے پہلی جماعت کی بالائی حد کے درمیان فرق معلوم کیجیے۔ اِسے d سے ظاہر کرتے ہیں۔

دوسرا قدم: $\frac{d}{2}$ کو اُس جماعت کی زیریں حد سے تفریق کرنے سے جماعت کی حقیقی زیریں حد حاصل ہوتی ہے اور اِسے بالائی جماعتی حد میں جمع کرنے سے جماعت کی حقیقی بالائی سرحد معلوم ہوتی ہے۔

موضوع 4.8.5 میں مواد کی حقیقی جماعتی حدود یہ ہیں:

9.5 – 14.5, 14.5 – 19.5, 19.5 – 24.5, ...

اِسی طرح اگر جماعتی حدود کی شکل میں جماعتیں یہ ہیں:

10 – 14.9, 15 – 19.9, 20 – 24.9, ...

تو جماعتی حدود کی شکل میں جماعتیں یہ ہوں گی:

9.95 – 14.95, 14.95 – 19.95, 19.95 – 24.95, ...

4.9 جدول بندی (*Tabulation*)

ایسا مواد جس کی جماعت بندی کی گئی ہو اُس کی اس طرح جَدْول بندی کی جاتی ہے کہ دی گئی معلومات بہترین طریقے سے استعمال میں لائی جاسکے۔

جَدْول دیے گئے مواد کی قطاروں (Rows) اور کالموں (Columns) کی صورت میں منظم ترتیب کا نام ہے۔ ہر جماعت جس میں مواد تقسیم کیا گیا ہو، قطار یا کالم کو متعین کرتی ہے اور متناظرہ (Corresponding) تعددات کو مخصوص خانے (Cell) میں لکھا جاتا ہے۔

خصوصیات کی تعداد کے لحاظ سے جدول بنائی جاتی ہیں۔

4.9.1 یک طرفہ جدول بندی (*One way Tabulation*)

یک طرفہ جدول بندی (One way Tabulation) میں معلومات کو صرف ایک خصوصیت یا متغیر کے لیے پیش کی جاتی ہیں۔ مثلاً ایک مخصوص دن کے لیے ایک جماعت میں ہر طالب علم کے جیب خرچ کا جدول۔ ایسا جدول مندرجہ ذیل طریقے سے پیش کیا جاسکتا ہے۔

روپے	طلباء کی تعداد
5 – 10	6
11 – 16	11
17 – 22	14
23 – 28	22
29 – 34	10
35 – 40	7
میزان	**70**

4.9.2 دوطرفہ جدول بندی (*Two way Tabulation*)

جب ہم مواد کی جدول بندی اس طریقے سے کرتے ہیں کہ وہ بیک وقت دو خصوصیات سے متعلق ہوں تو اسے دوطرفہ جدول بندی (Two way Tabulation) کہتے ہیں مثلاً مندرجہ ذیل جدول میں بیک وقت دو خصوصیات، 50 طلباء کے اوزان اور قد، دکھائی گئی ہیں۔

اوزان (پونڈز میں)	قد (انچوں میں)					
	44 – 46	47 – 49	50 – 52	53 – 55	56 – 58	**میزان**
100 – 104	3	—	2	1	—	6
105 – 109	—	3	13	2	2	20
110 – 114	2	—	—	6	1	9
115 – 1119	—	1	7	2	5	15
میزان	5	4	22	11	8	50

نوٹ: 5 , 4 , 22 , 11 اور 8 طلباء کی تعداد کو ظاہر کرتے ہیں جن کے بالترتیب قد 46 – 44 ، 49 – 47 ، 52 – 50
55 – 53 اور 58 – 56 انچ ہیں۔ اسی طرح 6 ، 20 ، 9 اور 15 طلباء کی تعداد کو ظاہر کرتے ہیں جن کے بالترتیب وزن
104 – 100 ، 109 – 105 ، 114 – 110 اور 119 – 115 پونڈ ہیں۔

4.10 تعددی تقسیم (Frequency Distribution)

ڈیٹا سیٹ کے اراکین کی جماعت بندی کو تعددی تقسیم کہا جاتا ہے۔ یہ مواد کی قطاروں یا کالموں میں ترتیب ہوتی ہے جو بامعنیٰ ہو۔ یہ کسی جماعت یا گروہ میں متغیر کے تعدد کو ظاہر کرتی ہے۔

4.11 تعددی تقسیم کی تشکیل

تعددی تقسیم کی تشکیل کے اقدامات یہ ہیں

پہلا قدم: زد (Range) معلوم کیجیے یعنی سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کا فرق معلوم کیجیے۔

دوسرا قدم: جماعتوں کی تعداد یا جماعتی وقفے کی لمبائی (h) مندرجہ ذیل اصول استعمال کرتے ہوئے معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$\text{جماعتوں کی تعداد} = \frac{\text{زد}}{h}$$

جماعتوں کی تعداد 5 اور 15 کے درمیان ہونی چاہیے۔

تیسرا قدم: ابتدائی نقطہ اور بقایا جماعتی حدود معلوم کیجیے۔

اگر متغیر کی کئی قیمتیں ایک جماعت میں شامل کی جائیں تو جماعتی حدود "اِس رقم سے اُس تک" کی اصطلاح میں بیان کی جا سکتی ہے۔ پس اگر h کی قیمت 5 ہے تو قیمتوں 0 ، 5 ، 10 ، 15 ، .... میں سے کسی سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔ اور اگر h کی قیمت 3 ہے تو ہم قیمتوں 0 ، 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، .... میں سے کسی سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔

چوتھا قدم: مواد کو مناسب جماعتوں میں مندرجہ ذیل دو طریقوں سے تقسیم کیجیے۔

(i) مطابقت (ٹیلی) کا طریقہ (ii) اصل قیمتوں کی فہرست بنانا

(i) مطابقت (ٹیلی) کا طریقہ (Tally Method)

پہلے شے یا حد منتخب کیجیے اور دیکھیے کہ یہ کس جماعت میں آتی ہے ہر حد کے لیے ایک چھوٹا ٹیلی کا نشان "I" اُس جماعت کے مقابل کھینچیے اور متعلقہ شے پر نشان (✓) لگائیے۔ اس عمل کو جاری رکھیے تا وقتیکہ آخری شے نشان زدہ نہ ہو جائے۔ اگر کچھ ارکان 3 مرتبہ آئیں یا 3 مختلف ارکان ایک ہی جماعت میں آئیں تو ہم اسے "III" سے ظاہر کرتے ہیں۔

ٹیلی کے نشانات کو پانچ پانچ کے سیٹوں میں رکھا جاتا ہے۔ ہر پانچویں ٹیلی کے نشان کو پہلے چار نشانات کو ترچھا کاٹتے ہوئے لگایا جاتا ہے۔ مثلاً "~~IIII~~"۔

ایک ہی جماعت میں آٹھ مدّات کو "III 𝍸" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تمام ارکان کونشان زدہ کرنے کے بعد ہر جماعت کے مقابل مدّات کے نشانوں کی تعداد کو گنا جاتا ہے اور اسی جماعت کے مقابل تعدد کے کالم (*Column*) میں اس تعداد کو لکھا جاتا ہے۔

مثال 1۔ کسی اسکول (School) کے صدر مدرس 18 دنوں تک کسی جماعت کا معائنہ کرتے ہیں اور جماعت میں غیر حاضر طلباء کی مندرجہ ذیل تعداد حاصل کرتے ہیں۔

4 , 3 , 0 , 1 , 2 , 5 , 6 , 8 , 10 , 7 , 11 , 15 , 13 , 14 , 3 , 4 , 12 , 12

ٹیلی کے طریقے سے مندرجہ بالا مواد کے لیے تعددی تقسیم تشکیل دیجیے۔

حل: زد (*Range*) = سب سے بڑی قیمت − سب سے چھوٹی قیمت

$= 15 - 0$

$= 15$

اگر جماعت کی جسامت = 4 تو جماعتوں کی تعداد $= \frac{15}{4} = 4$ (تقریباً)

ہم صفر کو پہلی جماعت کا ابتدائی نقطہ لیتے ہیں۔ اور مندرجہ ذیل جدول تیار کرتے ہیں۔

تعددی تقسیم کی جدول (ٹیلی کا طریقہ)

جماعتی وقفے	ٹیلی کے نشانات	تعدد
0 – 3	𝍸	5
4 – 7	𝍸	5
8 – 11	III	3
12 – 15	𝍸	5

ٹیلی کے نشانات کی تعداد = 18 = کل تعدد

نکات:

1۔ کسی جماعت میں اس کی حقیقی بالائی سرحد شامل نہیں ہے۔

2۔ مندرجہ بالا مثال میں جماعتی وقفے حقیقی جماعتی حدود کی شکل میں بھی لکھے جا سکتے ہیں:

0 – 4 , 4 – 8 , 8 – 12 , 12 – 16

جبکہ جماعت 4 – 0 کی حقیقی بالائی حد 4 اس میں شامل نہیں ہے، اور جماعت 16 – 12 کی حقیقی بالائی حد 16 اس میں شامل نہیں ہے۔

(ii) فہرست بنانے کا طریقہ یا راست طریقہ (*Listing Method Direct Method*)

یہ طریقہ ٹیلی طریقے کی طرح ہے مگر ٹیلی کے نشانات کی جگہ متعلقہ جماعت میں مشاہدات کی اصل قیمتیں لکھی جاتی ہیں۔

گذشتہ مثال کے مواد کو لیتے ہوئے ہم مندرجہ ذیل جدول تیار کرتے ہیں۔

تعدد	ارکان	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
5	3, 0, 1, 2, 3	0 – 4	0 – 3
5	4, 5, 6, 7, 8	4 – 8	4 – 7
3	8, 10, 11	8 – 12	8 – 11
5	15, 13, 14, 12, 12	12 – 16	12 – 15

کل ارکان کی تعداد = 18 = کل تعداد

نوٹ: مسلسل متغیرات کی صورت میں کبھی کبھی مشاہدات کا اندراج اس طرح بھی کیے جاتے ہیں: 10 ,11 , 12 , 13 وغیرہ جبکہ مشاہدات کی اصل قیمتیں بیان کردہ قیمتوں سے 0.5 اکائیاں زیادہ یا کم ہوتی ہیں۔ اصل جماعتی حدود اور بیان کردہ جماعتی حدود کے درمیان فرق کی یہی وجہ ہوتی ہے۔ غیر مسلسل متغیرات کی صورت میں اصل جماعتی حدود اور بیان کردہ جماعتی حدود کے درمیان کوئی فرق نہیں ہوتا ہے۔

مثال 2۔ مندرجہ ذیل نمبر 25 طلباء نے 100 نمبروں میں سے حاصل کیے ہیں۔

45 , 50 , 51 , 51 , 54 , 53 , 53 , 52 , 55 , 57 , 54 , 58 , 60 , 62 , 59 , 61 , 61 , 62 ,
63 , 64 , 48 , 65 , 53 , 66 , 65

مندرجہ بالا مواد کے لیے تعددی تقسیم مندرجہ ذیل ہے:

وسطی نقطہ (x)	حقیقی جماعتی حدود	طلباء کی تعداد	نمبر
47	44.5 – 49.5	2	45 – 49
52	49.5 – 54.5	9	50 – 54
57	54.5 – 59.5	4	55 – 59
62	59.5 – 64.5	7	60 – 64
67	64.5 – 69.5	3	65 – 69

4.12 گراف (*Graphs*)

ایسے مواد کو جو وقت کی کسی مدت پر پھیلا ہوا ہو یا تعددی تقسیم میں ہو تو اسے اشکال اور نقشہ جات کی شکل میں پیش کرنا ممکن ہوتا ہے لہٰذا اس قسم کے مواد کو ظاہر کرنے کے لیے گراف استعمال کیے جاتے ہیں۔

گراف مواد کو آسان، واضح اور موثر انداز میں پیش کرتے ہیں۔

4.12.1 فوائد

(i) گراف دو یا دو سے زائد سلسلوں کے درمیان موازنے کو آسان بناتے ہیں۔

(ii) گراف کے ذریعے سلسوں کی ایک مکمل تصویر سامنے آجاتی ہے۔

(iii) گراف کو پیشن گوئی کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

4.12.2 نقصانات

گراف بالکل درست نہیں ہوتے، کیونکہ مکمل جزیاتی تفصیلات ظاہر کرنے سے قاصر ہوتے ہیں۔

4.12.3 گراف کی تشکیل

(i) بالائی حصہ پر عنوان دیجیے۔

(ii) پیانہ اور مواد کا ذریعہ دیں، رہنمائی کے لیے کلید بھی دینا ضروری ہے۔

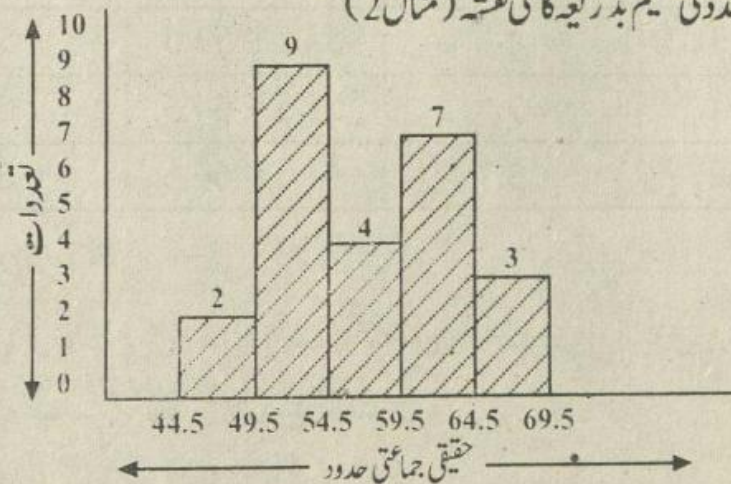
(iii) عمودی محور ہمیشہ صفر سے شروع ہو، اُفقی محور کو صفر سے شروع کرنا ضروری نہیں ہے۔

(iv) محور پر متغیر اور اس کی اکائیاں واضح طور پر درج ہوں۔

(v) آزاد متغیر (*Independent Variable*) X- محور پر لیا جائے اور منحصر متغیر (*Dependent Variable*) Y- محور پر لیا جائے۔

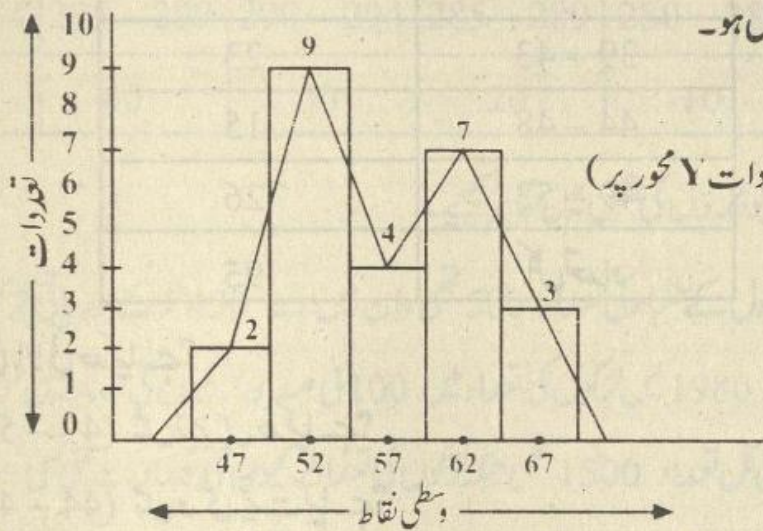
4.13 کالمی نقشہ (*Histogram*)

یہ متصلہ مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے جن کے قائدے X- محور کے ساتھ حقیقی جماعتی حدود (یا جماعتی حدود) کے ذریعے نشان زدہ ہوتے ہیں۔ اور اِن کی اونچائیاں (*Heights*) جوانھی جماعتوں کے ساتھ وابستہ تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔ اگر جماعتی وقفوں کی لمبائیاں مساوی ہوں تو ہر مستطیل کا رقبہ اسی جماعتی تعدد کے متناسب ہوتا ہے۔

عنوان: 25 طلباء کے نمبروں کی تعددی تقسیم بذریعہ کالمی نقشہ (مثال 2)

4.14 تعددی کثیر الاضلاع :

اس گراف کے ذریعہ تعددی تقسیم کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اِسے مواد سے براہ راست بنایا جاسکتا ہے یا جب کالمی نقشہ بن جائے تو مستطیلوں کے بالائی حصوں کے وسطی نقاط کو قطعات کے ذریعے ملادیتے ہیں۔ X- محور کو چھونے کے لیے ہم قطعات کو انتہائی وسطی نقاط سے X- محور تک بڑھا دیتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہونے والا گراف تعددی کثیر الاضلاع (*Frequency plygon*) کہلاتا ہے۔ اس قسم کے گراف کو کالمی نقشہ پر دیکھا جاسکتا ہے جو کہ مثال 2 کے مواد کے لیے ہے۔

1۔ X- محور پر جماعتی حدود کے وسطی نقاط اور Y- محور پر تعددات لیں۔

2۔ ہر وسطی نقطہ کے سامنے اس کے متناظرہ تعدد پر نشان لگایئے۔ تمام نشانات کو قطعات کے ذریعے اس طرح ملایئے کہ مطلوبہ تعددی کثیر الاضلاع حاصل ہو۔

اسکیل

0.6 سینٹی میٹر = 1 خانہ (تعددات Y محور پر)

3۔ آخر میں دونوں طرف صفر جماعتی تعدد کے ساتھ X- محور پر مزید وسطی نقاط لیں اور انہیں انتہائی بالائی وسطی نقاط سے ملادیں۔ اس طرح کثیر الاضلاع افقی خط کے ساتھ ایک بند شکل بناتا ہے۔

مشق 4.1

1۔ جدول بندی اور تخصیص کے فوائد بیان کیجیے۔

2۔ ابتدائی مواد، ثانوی مواد، شماریاتی آبادی اور نمونہ کے درمیان فرق واضح کیجیے۔

3۔ 25 سالوں کے لیے بارش کے مندرجہ ذیل مواد (سینٹی میٹر میں) سے ٹیلی کے طریقہ اور فہرست بنانے کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے تعددی تقسیم تیار کیجیے۔

(i) ہر صورت کے لیے وسطی نقاط اور جماعتی تعددات معلوم کیجیے۔

(ii) تعددی کثیر الاضلاع بنایئے۔

4۔ طبیعات کی تجربہ گاہ میں سائنس کے طلباء کے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل تعددی تقسیم میں دکھائے گئے ہیں۔

5, 25, 16, 8, 12, [illegible], 1, 14, 21, 23, 4, 11, 22,3, 2, 5, 11, 7, 25, 13, 17, 2, 6, 7, 9

درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

طلباء کی تعداد	حاصل کردہ نمبر
03	24 – 28
16	29 – 33
12	34 – 38
23	39 – 43
15	44 – 48
26	49 – 53
95	کل تعداد

(i) آخری جماعت کی بالائی حد کیا ہے؟

(ii) جماعتی وقفے (53 – 49) میں زیریں حد کیا ہے؟

(iii) جماعتی وقفے (48 – 44) میں وسطی قیمت کیا ہے؟

(iv) جماعتوں (33 – 29) اور (48 – 44) کے جماعتی تعددات کیا ہیں؟

(v) اُس جماعت کی زیریں حد کیا ہے جس کا جماعتی تعدد 16 ہے؟

5۔ مضمون نویسی کے امتحان میں دسویں جماعت کے طلباء کی غلطیاں درج ذیل ہیں۔ جماعتی وقفہ کی مناسب جسامت کا استعمال کرتے ہوئے تعددی تقسیم کی جدول بنائیے اور جماعتی وقفوں کی تعداد بھی ظاہر کریں۔

14, 7, 12, 9, 21, 16, 3, 19, 17, 24, 14, 15, 8, 13, 11, 16, 15, 6, 5, 8, 11, 20, 18, 22, 16, 2, 1, 3

6۔ دسویں جماعت کے طلباء کے ایک گروپ نے انگریزی کے مضمون میں مندرجہ ذیل نمبر (100 میں سے) حاصل کیے۔

38, 59, 58, 33, 40, 58, 45, 46, 43, 45, 45, 50, 52, 49, 50, 57, 63,

55, 49, 50, 65, 49, 48, 44, 42, 47, 46, 47, 46, 53, 40, 44, 20, 12.

5 کی جسامت کا جماعتی وقفہ لیتے ہوئے مواد کی ایک تعددی تقسیم راست طریقے کے ذریعے کیجیے۔ نیز سب سے کم جماعتی تعدد والا جماعتی وقفہ معلوم کیجیے۔

7۔ علم کیمیا کے ایک جماعتی امتحان میں دسویں جماعت کے 80 طلبا کے حاصل کردہ نمبروں کو مندرجہ ذیل تعددی تقسیم میں دکھایا گیا ہے۔

حاصل کردہ نمبر	35 – 39	40 – 44	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69
طلباء کی تعداد	2	12	18	24	12	9	3

مندرجہ بالا تعددی تقسیم کے لیے کالمی نقشہ بنائیے۔

8۔ کارکنوں کی روزانہ اُجرت (روپوں میں) کی مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے کالمی نقشہ بنائیے۔

اُجرت	280 – 284	285 – 289	290 – 294	295 – 299	300 – 304	305 – 309
کارکنوں کی تعداد	10	20	30	40	35	25

9۔ مندرجہ ذیل معلومات کو جدول کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

1970 میں ایک اسکول کے طلباء کی تعداد 500 تھی، اِن میں سے 450 لڑکے اور باقی لڑکیاں تھیں۔ 1970 میں اُن کی تعداد کے مقابلے میں 1980 میں لڑکوں کی تعداد میں 100 فی صد اور لڑکیوں کی تعداد میں 200 فی صد اضافہ ہوا۔ 1990 میں اسکول میں طلباء کی کل تعداد 1500 تھی جبکہ لڑکوں کی تعداد لڑکیوں کی تعداد سے تگنی تھی۔

10۔ مندرجہ ذیل گروہی مواد کے لیے تعددی کثیرالاضلاع بنائیے۔ مذکورہ گراف کے بنانے میں ملوث اہم اقدامات بیان کیجیے۔

جماعتی نشان (x)	10	20	30	40	50	60
تعدد (f)	5	15	25	30	20	5

4.15 اشکال کے ذریعے اظہار

نقاط، خطوط اور دیگر ہندسی اشکال میں مواد کی نظری صورت گرافی اظہار کہلاتی ہے۔ اِس نظری صورت کو دو بڑی اقسام میں تقسیم کیا جاسکتا ہے: **(i)** گراف اور **(ii)** اشکال

گراف مواد کا منحنی خطوط کے ذریعے اظہار ہے جبکہ شکل (*Diagram*) نظری صورت کی دوسری قِسم ہے۔ سادہ اعداد کے مقابلے میں خوب صورتی سے سجائی گئی اشکال زیادہ پرکشش ہوتی ہیں۔ اور مختلف ڈیٹا سیٹ کے موازنے کو آسان بناتا ہے۔

4.15.1 سادہ کالمی شکل (*Simple Bar Diagram*)

یہ مساوی چوڑائی کے عمودی کالموں (یا مساوی لمبائی کے اُفقی کالموں) پر مشتمل ہوتے ہیں جو اُن قیمتوں کے متناسب ہوتے ہیں جنہیں ظاہر کرتے ہیں۔ اِن کی بناوٹ مندرجہ ذیل اقدامات پر مشتمل ہوتی ہے۔

(i) گراف کاغذ پر دو خطوط عمودی اور اُفقی کھینچیے۔

(ii) مواد کی قیمتوں کے لحاظ سے مناسب پیمانے کا انتخاب کیجیے۔

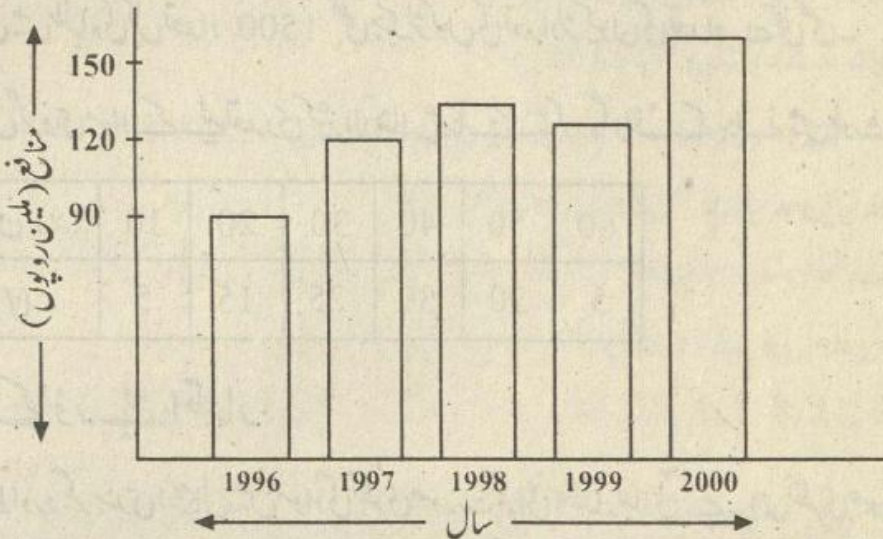
(iii) کالموں کی چوڑائی یکساں اور لمبائی ان کی متناظرہ تعدد کے متناسب لیجیے۔

(iv) آخر میں گراف کاغذ پر عنوان اور گراف کا جو پیمانہ لیا گیا ہو لکھیئے۔

اس گراف کو کالمی چارٹ (Bar Chart) بھی کہتے ہیں۔

مثال۔ مندرجہ ذیل مواد 1996 سے 2000 کے دوران ایک کمپنی کے خالص منافع (ملین روپوں میں) کو ظاہر کرتا ہے۔ سادہ کالمی شکل کے ذریعے اِس مواد کو ظاہر کیجیے۔

سال	1996	1997	1998	1999	2000
منافع (ملین روپوں)	90	120	138	128	165

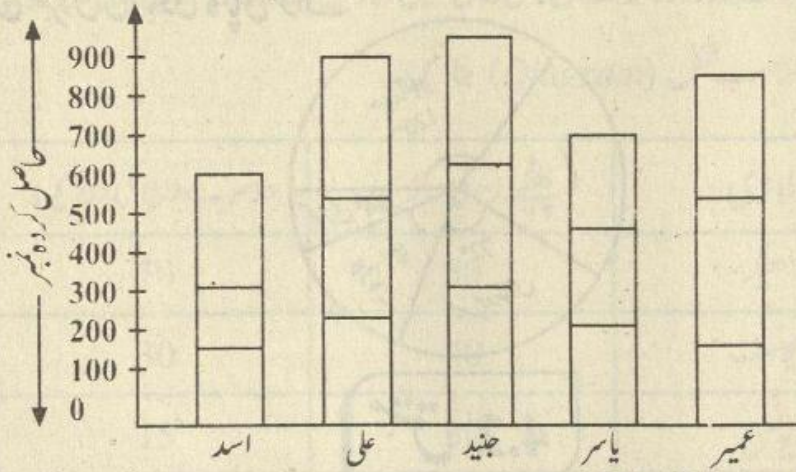
عنوان: سادہ کالمی شکل جو سال 1996 سے سال 2000 تک کے دوران کمائے گئے منافع کو ظاہر کرتی ہے۔

4.15.2 کثیر العناصر کالمی شکل (*Multiple Bar Diagram*)

اِسے متغیر کی دو یا دو سے زائد خصوصیات کے بیک وقت موازنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر تین امتحانوں یعنی سہ ماہی، ششماہی اور سالانہ میں طلباء کے حاصل کردہ نمبر کثیر العناصر کالمی شکل کے ذریعے ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ اِسے تین الگ الگ

کالمی اشکال بنا کر حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن امتحانوں کے درمیان نمبروں کا موازنہ کرنے کے لیے اِن تین سادہ کالمی اشکال کو ایک گروپ میں متناظرہ کالموں جنھیں مختلف رنگوں یا خطوط سے واضح کیا جاتا ہے کو بناتے ہوئے اکٹھا کیا جاتا ہے۔

مثال: سہ ماہی، ششماہی اور سالانہ امتحانوں میں 5 طلباء کے حاصل کردہ نمبر (400 میں سے) مندرجہ ذیل ہیں۔ اِس مواد کو بذریعہ کثیر العناصر کالمی شکل سے ظاہر کیجیے۔

طلباء کے نام	سہ ماہی	ششماہی	سالانہ	کُل تعداد
اسد	150	150	300	600
علی	250	300	350	900
جنید	300	300	350	950
یاسر	250	200	250	700
عمیر	200	350	300	850

عنوان: کثیر العناصر کالمی شکل جو سہ ماہی، ششماہی اور سالانہ امتحانوں میں 5 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں کا موازنہ دکھاتی ہے۔

4.15.3 پائی گراف (*Pie Diagram*)

یہ گراف دائرے کی قطعاتی تقسیم پر مشتمل ہوتا ہے۔ جن کے رقبات ایک مکمل مقدار کے تقسیم کردہ مختلف حصّوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

یہ دائروی شکل (*Circle Diagram*) یا قطعاتی شکل (*Sector Diagram*) بھی کہلاتی ہے۔ اِسے مختلف مدات کی قیمتوں کو دائرے کے متناظرہ قطعات کے ذریعہ موازنہ کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

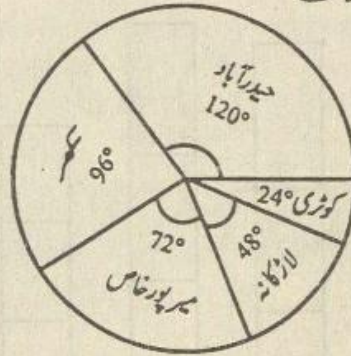
مثال: مندرجہ ذیل جدول میں سندھ کے پانچ شہروں کی آبادی دکھائی گئی ہے۔ اِس مواد کو پائی گراف میں ظاہر کیجیے۔

شہر	حیدرآباد	سکھر	میرپورخاص	لاڑکانہ	کوٹری
آبادی (ہزاروں میں)	2000	1600	1200	800	400

حل:

شہر	آبادی	قطعاتی زاویے کی ڈگری کی مقدار (آبادی × 0.06)
حیدرآباد	2000	$2000 \times 0.06 = 120°$
سکھر	1600	$1600 \times 0.06 = 96°$
میرپورخاص	1200	$1200 \times 0.06 = 72°$
لاڑکانہ	800	$800 \times 0.06 = 48°$
کوٹری	400	$400 \times 0.06 = 24°$
کل تعداد	6000	$360°$

چونکہ $\frac{360}{6000} = 0.06$ لہٰذا ہر قصبے کی آبادی کو 0.06 سے ضرب دیتے ہوئے ہر قطعہ کے زاویے کی ڈگری کی مقدار حاصل ہوتی ہے۔

عنوان: سندھ کے پانچ شہروں کی آبادی کا پائی گراف

مشق 4.2

1۔ ایک طالبہ نادیہ کے پانچ امتحانوں میں گریڈ 80, 90, 70, 60 اور 85 تھے۔ ایک سادہ کالمی شکل کے ذریعے مندرجہ بالا گریڈز کو ظاہر کیجیے۔

2۔ تین کھیلوں میں چار طلباء کے بنائے گئے پوائنٹس (*Points*) (100 میں سے) ایک کثیر العناصر کالمی شکل سے ظاہر کیجیے۔

طلباء	پہلے کھیل میں پوائنٹس	دوسرے کھیل میں پوائنٹس	تیسرے کھیل میں پوائنٹس
طارق	72	64	50
عدیل	48	24	60
سعد	88	64	90
جاوید	40	56	30

3۔ ایک انگریزی اسکول کے اساتذہ کی تعداد اُن کے تعلیمی استعداد کے مطابق ذیل میں دی گئی ہے۔ پائی گراف سے ظاہر کیجیے۔

اساتذہ کی تعداد	تعلیمی استعداد
8	الیف اے، سی ٹی
5	الیف ایس سی
13	بی اے / بی ایس سی
16	بی اے، بی ایڈ
11	بی ایس سی، بی ایڈ
7	ایم اے / ایم ایس سی

4۔ ایک ہائی اسکول میں طلباء کے دوروزہ کرکٹ میچ میں بنائی گئیں دوڑیں (*Runs*) ذیل میں دی گئی ہیں۔ میچ کے دوران بنائی گئیں دوڑوں کے لیے مناسب شکل (*Diagram*) بنائیں۔

کھلاڑی	پہلے دن کی دوڑیں	دوسرے دن کی دوڑیں
سعید	50	70
یوسف	40	30
یونس	30	15
اکرم	40	10
رضا	60	30
وقار	10	25

4.16 مرکزی رجحان کے پیمانے

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب خام مواد کو تعددی تقسیم میں مختصر کیا جاتا ہے تو معلومات کو سمجھنا آسان ہوتا ہے۔ مواد میں دی گئی معلومات کو پوری تعددی تقسیم کے بجائے ایک نمائندہ قیمت کے لیے مزید مختصر کرسکتے ہیں۔ یہ کم وبیش مرکزی قیمت ہوتی ہے جس کے گرد مواد اکٹھا نظر آتا ہے۔ مثلاً عام طور پر ہم اس طرح کے بیانات یا جملے ادا کرتے ہیں:

(1) علی 6 گھنٹے روزانہ مطالعہ کرتا ہے۔
(2) مبینہ کے گھر کا ماہانہ خرچ پانچ ہزار روپے ہے۔
(3) عمارہ کی کار کی رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔
(4) منڈی میں آلوؤں کی قیمت 10 روپے فی کلوگرام ہے وغیرہ وغیرہ۔

اگر ہم پہلے جملے پر غور کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ علی ٹھیک 6 گھنٹے روزانہ مطالعہ نہیں کرتا۔ کبھی وہ 6 گھنٹے سے زیادہ اور کبھی کم مطالعہ کرتا ہے۔ لیکن ہم کیوں کہتے ہیں کہ وہ 6 گھنٹے روزانہ مطالعہ کرتا ہے ؟ وہ چونکہ 6 گھنٹے کے قریب روزانہ مطالعہ کرتا ہے اس لیے اس کے مطالعہ کے وقت 6 گھنٹے کو ایک خاص حیثیت حاصل ہوتی ہے صرف اس کی تقریباً قیمت کی وجہ سے، جسے ہم اوسط کہتے ہیں۔ یہ اوسط قیمت مرکزی رجحان کا پیانہ (*Measure of Central Tendency*) کہلاتی ہے کیونکہ یہ روزانہ مطالعہ کے وقت کی نمائندہ قیمت ہے۔ اسی طرح دیگر بیانات کو بھی نمائندہ قیمتیں مانا جاسکتا ہے۔ چونکہ ہر بیان تعددی تقسیم کے مرکز کو ظاہر کرتا ہے۔ اِس لیے یہ جائے وقوع کا پیانہ (*Measure of Location*) بھی کہلاتا ہے۔

اوسط واحد قیمت ہے جو مواد کے سیٹ کی نمائندہ ہوتی ہے۔ یہ وہ قیمت ہے جس کے گرد مواد کے سیٹ کے ارکان اکٹھا ہونے کے لیے رُخ کرتے ہیں۔

4.16.1 مرکزی رجحان کے پیانے کی اہمیت

(i) یہ مکمل آبادی کی تصویر پیش کرتا ہے۔
(ii) یہ مواد کے ایک جیسے گروہوں کے درمیان اپنی مرکزی حیثیت کے تعلق سے موازنہ کرنے میں مدد فراہم کرتا ہے۔

4.17 مرکزی رجحان کے پیانوں کی اقسام

مرکزی رجحان کی پ... ہم اقسام جنہیں عام طور پر اوسط کیا جاتا ہے، یہ ہیں:

(i) حسابی اوسط (*Arithmetic Mean*) (ii) وسطانیہ (*Median*) (iii) عادہ (*Mode*)
(iv) ہندسی اوسط (*Geometric Me...*) (v) ہم آہنگ اوسط (*Harmonic Mean*)

لیکن ہم یہاں صرف پہلی تین اقسام کا مطالعہ کریں گے۔

4.18 حسابی اوسط (*Arithmetic Mean*)

اس کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ وہ قیمت ہے جو تمام قیمتوں کے مجموعے کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔ پس قیمتوں $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ کے سیٹ کے حسابی اوسط کو $\overline{x}$ (جسے x بار پڑھتے ہیں) سے ظاہر کرتے ہیں اور اس طرح معلوم کرتے ہیں:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots\ldots x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$ (براہ راست طریقہ)

جبکہ علامت "$\sum$" مجموعہ کو اور "n" مشاہدات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال1۔ پانچ امتحانوں میں طلباء کے گریڈ 67, 75, 81, 87, 90 تھے۔ گریڈوں کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

حل: حسابی اوسط $= \frac{\sum x}{n} = \frac{67 + 75 + 81 + 87 + 90}{5}$

$$= \frac{400}{5} = 80$$

پس گریڈوں کا اوسط 80 ہے۔

4.18.1 حسابی اوسط معلوم کرنے کا طریقہ

اگر $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ مختلف مشاہدات کی قیمتیں ہیں اور $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$ اُن کی تعددات ہیں تو

$$\text{حسابی اوسط} = \overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n}$$

یا

$$\text{حسابی اوسط} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

مثال2۔ گاؤں میں 80 خاندانوں کے بچوں کی تعداد مندرجہ ذیل ہے۔

فی خاندان بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

فی خاندان بچوں کی اوسط تعداد معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ x_i فی خاندان بچوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور f_i خاندانوں کی تعداد ظاہر کرتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول میں حساب کتاب پیش کیا گیا ہے۔

فی خاندان بچوں کی تعداد x_i	خاندانوں کی تعداد f_i	$f_i x_i$
1	8	8
2	10	20
3	10	30
4	25	100
5	20	100
6	7	42
	$n = \sum f_i = 80$	$\sum f_i x_i = 300$

پس حسابی اوسط $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{300}{8} = 3.75$

یانی خاندان بچوں کی اوسط تعداد تقریباً 4 ہے۔

4.18.2 گروہی مواد سے حسابی اوسط معلوم کرنے کا طریقہ

فرض کیا کہ $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ جماعتی وقفوں کے وسطی نقاط ہیں جن کے متناظرہ تعددات $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$ ہیں تو حسابی اوسط f اور x کے حاصل ضرب کے مجموعے کو تعددات کے مجموعے سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ پس

$$\text{حسابی اوسط } \overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n}$$

یعنی

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}}$$

مثال 3۔ ذیل میں 200 طلباء کے قد (انچوں میں) دیئے گئے ہیں۔ حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

حل:

قد (انچوں میں)	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
طلباء کی تعداد	28	32	36	46	36	22

قد (انچوں میں)	وسطی نقاط x	تعدد f	fx
30 – 35	32.5	28	910
35 – 40	37.5	32	1200
40 – 45	42.5	36	1530
45 – 50	47.5	46	2185
50 – 55	52.5	36	1890
55 – 60	57.5	22	1265
کل تعداد	—	$\sum f = 200$	$\sum fx = 8980$

پس $\overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{8980}{200} = 44.90$ انچ

مثال 4۔ ذیل میں 100 طلباء کے اوزان (کلوگرام میں) دیئے گئے ہیں۔ اوسط وزن معلوم کیجیے۔

وزن (کلوگرام)	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89	90 – 94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل:

وزن	وسطی نقاط x	تعدد f	fx
70 – 74	72	10	720
75 – 79	77	24	1848
80 – 84	82	46	3772
85 – 89	87	12	1044
90 – 94	92	8	736
کل تعداد	—	$\sum f = 100$	$\sum fx = 8120$

پس حسابی اوسط $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{8120}{100} = 81.20$ (Kg)

پس اوسط وزن 81.2 کلوگرام ہے۔

4.18.3 حسابی اوسط نکالنے کا مختصر طریقہ

غیر گروہی مواد اور گروہی مواد دونوں کے لیے براہ راست طریقے کا استعمال کرتے ہوئے x اور f کی چھوٹی قیمتوں کے لیے حسابی اوسط نکالنا بے شک سود مند ہے۔ لیکن جب x اور f کی قیمتیں بڑی ہوں تو حسابی اوسط نکالنا مشکل ہو جاتا ہے۔ اس لیے وقت کو ضائع ہونے سے بچانے اور حسابی عمل کو آسان بنانے کے لیے ہم فرضی اوسط سے انحراف (*Deviations*) معلوم کرتے ہیں۔ فرض کیا کہ A فرضی اوسط ہے (قیمتوں میں سے کوئی قیمت یا کوئی دوسرا عدد ہو سکتا ہے) اور D , A سے x کے انحراف کو ظاہر کرتا ہے یعنی $X = D + A$, $D = X - A$ تو حسابی اوسط کا کلیہ یہ ہوگا۔

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n} \quad \text{(غیر گروہی مواد کے لیے)} \quad ...... \quad (1)$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fD}{\sum f} \quad \text{(گروہی مواد کے لیے)} \quad ...... \quad (2)$$

اِس طریقے میں ہم ایک مناسب اوسط کا انتخاب کرتے ہیں اور مندرجہ ذیل اقدامات پر عمل کرتے ہیں۔

1۔ A سے X کا انحراف (*Deviations*) معلوم کریں۔

2۔ انحراف کا اوسط معلوم کرنے کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

3۔ دیئے گئے مواد کی اوسط کے لیے دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

مثال 5: مختصر طریقے کا استعمال کرتے ہوئے 9 میچوں میں سعید انور کے بنائے گئے رنز (*Runs*) کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

رنز : 40 , 45 , 50 , 52 , 50 , 60, 56 , 70

حل: A = 52 سے انحراف لینے سے

x	40	45	50	52	50	60	56	70
$D = x - A$	−12	−7	−2	0	−2	8	4	18

$$\Sigma D = -23 + 30 = 7$$

اس لیے (غیر گروہی مواد کے لیے)

$$\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma D}{n}$$

$$= 52 + \frac{7}{8} = 52 + 0.875 = 52.88$$

یا $\bar{x} =$ 53 رنز

A = 60 سے بھی انحرافات لینے سے

$$\Sigma D = -57$$

اس لیے $\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma D}{n}$

$$= 60 + \frac{-57}{8} = 60 - 7.12 = 52.88$$

یا $\bar{x} =$ 53 رنز

مندرجہ بالا مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ A کی کوئی بھی مناسب قیمت لی جا سکتی ہے۔

مثال 6۔ دس مختلف دنوں میں سیبوں کی قیمتوں کے 12 سے انحرافات یہ ہیں:

−4.5 , −6.5 , 11 , 14 , −5.5 , 7 , 8 , 9 , 3.5 , −2

حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

: D = −2 , 3.5 , 9 , 8 , 7 , −5.5 , 14 , 11 , −6.5 , −4.5

اب A = 12 اور $\Sigma D = -18.5 + 52.5 = 34$

کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma D}{n} = 12 + \frac{34}{10} = 12 + 3.4 = 15.4$$

مثال 7۔ مختصر طریقے کا استعمال کرتے ہوئے مثال 3 میں دیے گئے 200 طلباء کے قدوں کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

حل: $A = 42.5$ سے انحرافات لیتے ہوئے

قد (انچوں میں)	وسطی نقاط x	تعدد f	$D = x - A$	fD
30 – 35	32.5	28	–10	–280
35 – 40	37.5	32	–5	–160
40 – 45	42.5	36	0	0
45 – 50	47.5	46	5	230
50 – 55	52.5	36	10	360
55 – 60	57.5	22	15	330
کل تعداد	—	$\Sigma f = 200$	—	$fD = 480$

کلیہ (2) کا استعمال کرتے ہوئے

$$\therefore \quad \overline{x} = A + \frac{\Sigma fD}{\Sigma f}$$

$$= 42.5 + \frac{480}{200}$$

$$= 42.5 + 2.4 = 44.90$$ انچ

اب ہم حسابی اوسط نکالنے کا ایک دوسرا طریقہ بیان کرتے ہیں۔

4.18.4 حسابی اوسط نکالنے کا کوڈنگ طریقہ (Coding Method to Find A.M.)

یہ طریقہ اُسی وقت مؤثر ہوتا ہے کہ تمام جماعتی وقفوں کی جسامت (h) یکساں ہو۔

کوڈنگ متغیر (Coding variable) u کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$u = \frac{x - A}{h}$$

جبکہ A عارضی اوسط اور h جماعتی وقفے کی جسامت یا دی گئی قیمتوں کا عاد اعظم ہے۔

یا $$hu + A = x$$

حسابی اوسط کا کلیہ یہ ہے:

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma u}{n} \times h$$ (غیر گروہی مواد کے لیے) .... (3)

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma fu}{\Sigma f} \times h$$ (گروہی مواد کے لیے) .... (4)

مثال8۔ ایک بڑے جنرل اسٹور پر پانچ مزدور کام کرتے ہیں۔ اُن کی روزانہ کی اُجرت 300 روپے، 350 روپے، 400 روپے، 450 روپے، 600 روپے ہے۔ کوڈنگ طریقے کے ذریعے اُجرت کی اوسط معلوم کیجیے۔

حل: کلیہ (3) استعمال کرتے ہوئے۔

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma u}{n} \times h$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ $A = 450$ اور $h = 50$ تو

x	300	350	400	450	600
$D = x - A$	−150	−100	−50	0	150
$u = \frac{D}{h}$	−3	−2	−1	0	3

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma u}{n} \times h$$

$$= 450 + \frac{-3}{5} \times 50$$

$$= 450 - 30 = \text{Rs. } 420$$

مثال9۔ مثال 3 میں دی گئی 200 طلباء کے قدوں کا حسابی اوسط کوڈنگ طریقہ معلوم کیجیے۔
فرضی طریقہ استعمال کیجیے۔

حل: $A = 42.5$ سے منحرف لیتے ہوئے جبکہ $h = 5$

fu	$u = \frac{D}{5}$	$D = x - A$	تعدد f	وسطی نقاط x	قد (انچوں میں)
−56	−2	−10	28	32.5	30 – 35
−32	−1	−5	32	37.5	35 – 40
0	0	0	36	42.5	40 – 45
46	1	5	46	47.5	45 – 50
72	2	10	36	52.5	50 – 55
66	3	15	22	57.5	55 – 60
$\Sigma fu = 96$	—	—	$\Sigma f = 200$	—	کل تعداد

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma fu}{\Sigma f} \times h$$

$$= 42.5 + \frac{96}{200} \times 5$$

$$= 42.5 - 2.4 = 44.9$$ انچ

مثال 10۔ مندرجہ ذیل معلومات سے حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

(i) $D = x - 10$ ، $\Sigma D = 50$ اور $n = 10$

(ii) $u = \dfrac{x-25}{5}$ ، $\Sigma u = 15$ اور $n = 10$

(iii) $D = x - 100$ ، $\Sigma fD = 400$ اور $\Sigma f = 50$

(iv) $u = \dfrac{x-100}{10}$ ، $\Sigma fu = 240$ اور $\Sigma f = 200$

حل: (i) چونکہ $D = x - A$ لہٰذا $A = 10$

پس $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma D}{n} = 10 + \dfrac{50}{10} = 15$

(ii) چونکہ $u = \dfrac{x-A}{h}$ لہٰذا $A = 25$ اور $h = 5$

پس $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma u}{n} \times h = 25 + \dfrac{15}{10} \times 5 = 25 + 7.5 = 32.5$

(iii) چونکہ $A = 100$ لہٰذا

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fD}{\Sigma f} = 100 + \frac{400}{50} = 108$$

(iv) چونکہ $A = 100$ اور $h = 10$

پس $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fu}{\Sigma f} \times h = 100 + \dfrac{240}{200} \times 10$

$$= 100 + 12 = 112$$

مثال 11۔ ایک اچھے اسکول کے پانچویں جماعت کے سیکشن A اور سیکشن B میں سے ہر ایک سے دس طلباء کو کسی ترتیب کے بغیر چنا گیا تھا۔ اُن کے قد انچوں میں ناپے گئے جنہیں ذیل میں دیا گیا ہے۔

57.5	60	53	51	54	55	49.5	52	48	50	قد (انچ) سیکشن A
54	56.5	56	49.5	53	52.5	55	54.5	51.5	55	قد (انچ) سیکشن B

(i) سیکشن A اور سیکشن B کے لیے قدوں کی اوسط معلوم کیجیے۔

(ii) اوسط کے لحاظ سے کون سا سیکشن بہتر ہے؟

حل: (i) ہم راست طریقے کے ذریعے دونوں سیکشنوں کا حسابی اوسط معلوم کرتے ہیں۔
(کوئی بھی طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے)

$x_{(A)}$	50	48	52	49.5	55	54	51	53	60	57.5	$\Sigma x_{(A)}$ 530
$x_{(B)}$	55	51.5	54.5	55	52.5	53	49.5	56	56.5	54	$\Sigma x_{(B)}$ 542.8

چونکہ مشاہدات کی تعداد n برابر 10 ہے۔ لہٰذا

$$\overline{x}_{(A)} = \frac{\sum x_{(A)}}{n}$$

$$\therefore \quad \overline{x}_{(A)} = \frac{530}{10} = 53 \text{ انچ}$$

اور

$$\overline{x}_{(B)} = \frac{\sum x_{(B)}}{n}$$

$$\therefore \quad \overline{x}_{(B)} = \frac{542.8}{10} = 54.28 \text{ انچ}$$

(ii) نتائج سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ $x_{(B)}$ ، $x_{(A)}$ سے بہتر ہے۔ لہٰذا اوسط کے لحاظ سے سیکشن B بہتر ہے۔

4.19 وسطانیہ (*Median*)

وسطانیہ وہ رقم یا قدر ہے جو مواد کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے یعنی مواد کا 50 فی صد وسطانیہ کی قیمت سے زیادہ ہوتا ہے اور 50 فی صد اس سے کم ہوتا ہے۔ پس اس کے لیے ضروری ہے کہ مواد کو ترتیب صعودی یا ترتیب نزولی میں لکھا جائے۔

4.19.1 غیر گروہی مواد کا وسطانیہ

n رقوم x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n کا وسطانیہ مندرجہ ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(i) جب n ایک طاق عدد ہو تو

$$\text{وسطانیہ} = \text{مشاہدات کی } \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ویں رقم یا قدر}$$

(ii) جب n ایک جفت عدد ہو تو

مشاہدات کی $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں رقم اور $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ ویں رقم کا اوسط وسطانیہ ہوتا ہے۔

غیر مسلسل تعددی تقسیم کے لیے وسطانیہ مجموعی تعددی (*Cumulative Frequency*) تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1۔ 7 میچوں میں ایک بلے باز نے مندرجہ ذیل دوڑیں بنائیں۔ وسطانیہ معلوم کیجیے۔ 8 , 12 , 18 , 13 , 16 , 5 , 20

حل: ترتیب صعودی میں دوڑیں لکھنے سے

5 , 8 , 12 , 13, 16 , 18 , 20

چونکہ $n = 7$ ایک طاق عدد ہے اس لیے

$$\text{وسطانیہ} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ویں رقم} = \frac{7+1}{2} = \text{چوتھی رقم}$$

پس وسطانیہ 13 دوڑیں ہیں۔

اہم بات یہ ہے کہ بلے باز نے 3 میچوں میں 13 دوڑوں سے کم اور تین میچوں میں 13 سے زیادہ دوڑیں بنائیں۔

مثال 2۔ انگریزی کے مضمون میں 10 طلباء نے مندرجہ ذیل نمبر (100 میں سے) حاصل کیے:

23 , 15 , 35 , 48 , 41 , 5 , 8 , 9 , 11 , 51

وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: حاصل کردہ نمبروں کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

5 , 8 , 9 , 11 , 15 , 23 , 35 , 41 , 48 , 51

چونکہ $n = 10$ ایک جفت عدد ہے۔اس لیے

$$\text{وسطانیہ} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ ویں رقم} + \left(\frac{n+2}{2}\right)\text{ ویں رقم}}{2}$$

$$= \frac{5\text{ ویں رقم} + 6\text{ ویں رقم}}{2}$$

$$= \frac{23+15}{2}$$

$$= \frac{38}{2} = 19\text{ نمبروں}$$

یہاں بھی 5 طلباء نے 19 سے زیادہ نمبر حاصل کیے اور 5 طلباء نے 19 سے کم نمبر حاصل کیے۔

4.19.2 گروہی مواد سے وسطانیہ نکالنے کا طریقہ

گروہی مواد سے وسطانیہ مندرجہ ذیل کلیہ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

جبکہ l = وسطانیہ جماعت کی حقیقی زیریں جماعتی حد

h = وسطانیہ جماعت کی جسامت

f = وسطانیہ جماعت کا تعدد

n = تعدد کی کل تعداد یعنی $\sum f$

c = وسطانیہ جماعت سے پہلے جماعتوں کا مجموعی تعدد

اہم نکات:

(1) جماعتیں یا گروہوں کو تسلسل میں ہونا چاہیے یعنی ہمیں حقیقی جماعتی حدود کی ضرورت ہوتی ہے۔

(2) تعددی کالم سے مجموعی تعدد (C.F) کا کالم مرتب کیجیے۔

(3) مجموعی تعددی (C.F) کالم میں $\frac{n}{2}$ ویں قیمت دیکھیے۔جس کی مقابل جماعت وسطانیہ جماعت ہوگی۔

(4) وسطانیہ جماعت کو خط کشیدہ کیجیے پھر وسطانیہ جماعت کے f اور h کی قیمت لیجیے۔

مثال 3۔ فصل 4.18.2 کی مثال 3 میں 200 طلباء کے دیے گئے قدروں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: مواد میں جماعتی سرحدیں دی ہوئی ہیں:

قد (انچوں میں)	تعدد f	مجموعی تعدد C.F	
30 – 35	28	28	
35 – 40	32	60 = 32 + 28	
40 – 45	36	96 = 36 + 60	"C" ←
45 – 50	46	142 = 46 + 96	وسطانیہ جماعت ←
50 – 55	36	178 = 36 + 142	
55 – 60	22	n = 200 = 22 + 178	

وسطانیہ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں رقم = $\frac{200}{2}$ = مشاہدات کی 100 ویں رقم

چونکہ مشاہدات کی 100 ویں رقم (50 – 45) میں ہے پس یہی وسطانیہ جماعت ہے۔

وسطانیہ = $l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$ کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

وسطانیہ = $45 + \frac{5}{46}(100 - 96)$

$= 45 + \frac{20}{46}$

$= 45 + 0.435$

$= 45.435$

پس قد کا وسطانیہ 45.435 انچ ہے۔

مثال 4۔ 100 طلباء کے اوزان کلوگرام میں مندرجہ ذیل ہیں۔ اوزان کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

اوزان (کلوگرام میں)	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89	90 – 94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: چونکہ حقیقی جماعتی حدود دی ہوئی نہیں ہیں اس لیے سب سے پہلے ہم عام طریقہ کار سے حقیقی جماعتی حدود معلوم کرتے ہیں۔

اوزان (Kgs)	طلباء کی تعداد	حقیقی جماعتی سرحدیں	C.F	
70 – 74	10	69.5 – 74.5	10	
75 – 80	24	74.5 – 79.5	34	← "C"
80 – 84	46	79.5 – 84.5	180	← وسطانیہ جماعت
85 – 89	12	84.5 – 89.5	92	
90 – 94	8	89.5 – 94.5	100	← n

وسطانیہ = مشاہدات کی $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں رقم = $\frac{100}{2}$ = 50 ویں رقم

چونکہ مشاہدات کی 50 ویں رقم (79.5 - 84.5) میں ہے۔ یہی وسطانیہ جماعت ہے۔

کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے۔

وسطانیہ = $l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

وسطانیہ = $79.5 + \frac{5}{46}(50 - 34)$

$= 79.5 + \frac{80}{46}$

$= 79.5 + 1.739$

$= 81.239$ کلوگرام

پس قدروں کا وسطانیہ 81.24 کلوگرام ہے۔

نوٹ: چونکہ وسطانیہ مقامی اوسط (*Positional Average*) ہے اس لیے ہر مد میں کوئی مستقل عدد جمع یا تفریق کرنے سے اس کا مقام (جگہ) تبدیل نہیں ہوتی۔

مثال 5۔ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 کے لیے وسطانیہ 5 ہے۔

(ہر رکن سے 10 جمع کرنے سے) 11 , 13 , 15 , 17 , 19 کے لیے وسطانیہ 15 ہے۔

(ہر رکن سے 1 تفریق کرنے سے) 0 , 2 , 4 , 6 , 8 کے لیے وسطانیہ 4 ہے۔

(ہر رکن کو 10 سے ضرب دینے سے) 10 , 30 , 50 , 70 , 90 کے لیے وسطانیہ 50 ہے۔

مثال 6۔ ہر ایک صورت کے لیے نامعلوم عدد معلوم کیجیے اگر وسطانیہ 5 ہو۔

(i) 1 , 3 , 5 , . , 10 **(ii)** 0 , 1 , 3 , 5 , ... , 10 , 100 **(iii)** 1 , ... , 5 , 10 , 12

حل: **(i)** کوئی ساعدد جو 5 سے بڑا یا برابر ہو اور 10 سے کم یا برابر ہو۔

(ii) کوئی ساعدد جو 5 سے بڑا یا برابر ہو اور 10 سے کم یا برابر ہو۔

(iii) کوئی ساعدد جو 1 سے بڑا یا برابر ہو اور 5 سے کم یا برابر ہو۔

4.20 عادہ (*Mode*)

کسی مواد کے سیٹ میں متغیر کی وہ قیمت ہے جو زیادہ سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔ یہ سب سے زیادہ عام قدر یا رقم ہوتی ہے۔

کسی مواد کے سیٹ میں ایک عاد یا ایک سے زیادہ عاد یا کوئی عاد نہیں ہو سکتا۔

4.20.1 غیر گروہی مواد کے لیے عادہ

مثال 1۔ آٹھ ماہانہ امتحانوں میں فرح کے گریڈ 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85 تھے۔ اُس کے گریڈوں کا عادہ معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ 82 دُوسرے اعداد سے زیادہ بار آیا ہے۔ اس لیے عادہ 82 ہے۔

مثال 2۔ 10 طلباء سے پوچھا گیا کہ اُنھوں نے پچھلے ہفتے میں 20 سوالات میں سے کتنے حل کیے جوابات یہ تھے۔

17 , 18 , 20 , 19 , 10 , 16 , 11 , 15 , 14 , 13

عادہ معلوم کیجیے۔

حل: مواد میں کوئی عادہ نہیں ہے کیونکہ کوئی بھی عدد ایک بار سے زیادہ نہیں آیا۔

بعض اوقات مواد میں کئی عاد ہوتے ہیں۔ اگر 25 , 20 , 20 , 20 , 15 , 15 , 15 , 10 = x

تو مواد میں دو عادہ ہیں یعنی 15 اور 20

نوٹ: ایک تعددی تقسیم سے عادہ آسانی کے ساتھ نہیں معلوم کیا جا سکتا چونکہ اس میں انفرادی قیمتیں نہیں ہوتیں اس لیے ہمیں یہ معلوم نہیں ہوتا کہ کون سی قیمت مواد میں زیادہ مرتبہ آتی ہے۔ ہم صرف یہ قیاس کرتے ہیں کہ وہ جماعت جس میں سب زیادہ تعدد ہو وہ عادہ جماعت (*Modal Class*) ہے۔ یہ جماعت ضروری نہیں کہ تعددی تقسیم کی انتہائیوں پر ہو۔

4.21.1 گروہی مواد عادہ نکالنے کا طریقہ

گروہی مواد سے عادہ مندرجہ ذیل کلیہ کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{عادہ} = l + \frac{(f_m - f_1) \times h}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)}$$

جبکہ l = عادہ جماعت کی حقیقی زیریں جماعتی حد

f_m = عادہ جماعت کا تعدد

f_1 = وہ تعدد جو عادہ جماعت سے پہلی جماعت

f_2 = وہ تعدد جو عادہ جماعت سے بعد کی جماعت

h = عادہ جماعت کی جسامت

عادہ جماعت وہ جماعت ہے جس میں سب سے زیادہ تعددات ہوں۔

مثال 3۔ فصل 4.18.2 کی مثال 3 میں 200 طلباء کے دیے گئے قدوں کا عادہ معلوم کیجیے۔

حل:

تعدد	قد (انچوں میں)
28	30 – 35
32	35 – 40
36 ← f_1	40 – 45
46 ← f_m	45 – 50 → عادہ جماعت
36 ← f_2	50 – 55
22	55 – 60
$\sum f = 200$	کل تعداد

کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$\text{عادہ} = l + \frac{(f_m - f_1) \times h}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)}$$

$$= 45 + \frac{(46 - 36) \times 5}{(46 - 36) + (46 - 36)}$$

$$= 45 + \frac{10 \times 5}{10 + 10} = 45 + 2.5 = 47.5 \text{ انچ}$$

پس قدوں کا عادہ 47.5 انچ ہے۔

مثال 4۔ فصل 4.18.2 کی مثال 4 میں ایک جماعت کے 100 طلباء کے اوزان (کلوگرام میں) دیئے گئے ہیں۔ عادہ معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ حقیقی جماعتی حدود نہیں دی گئیں ہیں اس لیے پہلے عام طریقے سے حقیقی جماعتی حدود معلوم کرتے ہیں۔

حقیقی جماعتی حدود	تعدد	اوزان (کلوگرام)
69.5 – 74.5	10	70 – 74
74.5 – 79.5	$24 = f_1$	75 – 79
عادہ جماعت ← 79.5 – 84.5	$46 = f_m$	80 – 84
84.5 – 89.5	$12 = f_2$	85 – 89
89.5 – 94.5	8	90 – 94
	$\sum f = 100$	—

چونکہ سب سے زیادہ تعدد 46 ہے جو کہ (79.5 – 84.5) میں موجود ہے۔ اِس لیے عادہ جماعت (79.5 – 85.5)

ہے۔ جس کی جسامت h برابر 5 ہے کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{عادہ} = l + \frac{(f_m - f_1) \times h}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)}$$

$$\text{عادہ} = 79.5 + \frac{(46-24) \times 5}{(46-24) \times (46-12)}$$

$$= 79.5 + \frac{22 \times 5}{22 + 34}$$

$$= 79.5 + \frac{110}{56} = 81.46 \text{ کلوگرام}$$

4.21 مرکزی رجحان کے پیمانوں کی خوبیاں اور خامیاں

4.21.1 حسابی اوسط کی خوبیاں

(i) اِسے ریاضاتی کلیہ کے ذریعے واضح کیا جاتا ہے۔

(ii) یہ تمام مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے۔

(iii) یہ معلوم کرنے اور سمجھنے میں آسان ہے۔

(iv) ریاضاتی طور پر یہ نسبتاً متوازن اور ریاضیاتی عمل کے قابل ہے۔

4.21.2 حسابی اوسط کی خامیاں

(i) مواد کی بڑی قیمتیں اس پر خاصی اثر انداز ہوتی ہے۔

(ii) بعض اوقات مغالطہ آمیز نتائج دیتا ہے۔

(iii) مقداری مواد کی صورت میں یہ مناسب پیمانہ نہیں ہے۔

4.21.3 وسطانیہ کی خوبیاں

(i) اِسے آسانی سے نکالا اور سمجھا جاتا ہے۔

(ii) مقداری مواد کی صورت میں یہ سُودمند ہے۔

(iii) بڑی قیمتیں اِس پر اثر انداز نہیں ہوتی ہیں۔

4.21.4 وسطانیہ کی خامیاں

(i) اِسے واضح طور پر بیان نہیں کیا جاتا ہے۔

(ii) یہ ضروری ہے کہ مواد کو ترتیب سے لکھا جائے۔

(iii) ریاضاتی طور پہ از خود کرنے میں یہ مفید نہیں ہے۔

(iv) یہ مشاہدات کی تمام قیمتوں کو استعمال نہیں کرتا ہے۔

4.21.5 عادہ کی خوبیاں

(i) بعض صورتوں میں عادہ کو معلوم کرنا بہت ہی آسان ہوتا ہے۔

(ii) بڑی قیمتیں اس پر اثر انداز نہیں ہوتی ہے۔

(iii) اِسے مقداری اور ماہیتی دونوں طرح کے مواد کے لیے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

4.21.6 عادہ کی خامیاں

(i) اِسے واضح طور پر بیان نہیں کیا جاتا ہے۔

(ii) یہ تمام مشاہدات پر مبنی نہیں ہوتا ہے۔

(iii) یہ اکثر غیر متعین اور غیر متناہی ہوتا ہے۔

(iv) بعض صورتوں میں عادہ موجود نہیں ہوتا ہے۔

مشق 4.3

1۔ اوسط کیا ہے؟ غیر گروہی اور گروہی مواد کا حسابی اوسط نکالنے کا طریقہ بیان کیجیے۔

2۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

(i) 3.2 , 6 , 10 , 12 , 15 , 20– , 25 , 28 , 30.8

(ii) 14 , 12 , 18 , 19 , 0 , 19– , 18– , 12– , 14–

(iii) 6.5 , 11 , 12.3 , 9 , 8.1 , 16 , 18 , 20.5 , 25

3۔ وسطانیہ کی تعریف کیجیے۔اس کی خوبیاں اور خامیاں بیان کیجیے۔گروہی مواد کے لیے وسطانیہ کیسے معلوم کرتے ہیں؟

4۔ ذیل میں 12 طلباء کے قد (انچوں میں) دیے گئے ہیں۔وسطانی قد معلوم کیجیے۔

51 , 55 , 53 , 54 , 58 , 60 , 61 , 62 , 56 , 57 , 52 , 64

5۔ عادہ کی تعریف کیجیے اور اس کی پیمائش کے طریقے بیان کیجیے۔

6۔ ذیل میں 10 مزدوروں کی روزانہ اجرتیں (روپوں میں) دی گئیں ہیں۔

188 , 170 , 172 , 125 , 115 , 195 , 181 , 190 , 195 , 190

معلوم کیجیے۔ (i) حسابی اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادہ

7۔ علم کیمیا میں طلباء کے حاصل کردہ نمبر ذیل میں دیے گئے ہیں۔ معلوم کیجیے۔

(i) راست اور مختصر طریقے سے اِن نمبروں کا حسابی اوسط

(ii) اِن نمبروں کا وسطانیہ

(iii) عادہ

8۔ مواد کے ایک سیٹ میں مندرجہ ذیل قیمتیں ہیں:

148 , 145 , 160 , 157 , 156 , 160 , 160 , 165

تو ثابت کیجیے: حسابی اوسط < وسطانیہ < عادہ

9۔ حیدرآباد میں جنوری کے دوران مختلف بیماریوں کی وجہ سے ہونے والی اموات کی تعداد ذیل میں تعددی تقسیم میں دی گئی ہے۔

موت کا سبب	ٹی.بی	ذیابیطس	ملیریا	ہیضہ	کینسر	دل	بی.پی
تعدد	3	2	2	1	3	5	1

موت کا سبب بننے والی عادہ جماعت معلوم کیجیے۔ کیا آپ حسابی اوسط اور وسطانیہ معلوم کر سکتے ہیں۔

10۔ مندرجہ ذیل معلومات سے حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

(i) $n = 10$ اور $\Sigma D = 600$, $D = x - 140$

(ii) $n = 25$ اور $\Sigma u = -150$, $u = \frac{x - 130}{6}$

(iii) $\Sigma f = 20$ اور $\Sigma f D = 300$, $D = x - 20$

(iv) $\Sigma f = 200$ اور $\Sigma fu = 60$, $u = \frac{x - 120}{5}$

11۔ ذیل میں دی گئی تعددی تقسیم $D = x - 20$ کے رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔ حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

D	–6	–4	–2	0	2	4	6
f	2	3	6	20	24	12	3

4.22 انتشار کا تصور (Concept of Dispersion)

مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کی تقسیم کی موزوں وضاحت نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ مثالی قیمت کے گرد مواد کیسے پھیلا ہوا ہے۔ ہمارے پاس دو یا دو سے زائد مواد کے سیٹ ایک ہی اوسط یا وسطانیہ کے ساتھ ہو سکتے ہیں۔ لیکن مرکزی قیمت کے گرد ان کے تغیر مختلف ہو سکتے ہیں۔ پس ہمیں مختلف سیٹوں کے موازنے اور مرکزی قیمت سے متعلق مختلف قیمتوں کے پھیلاؤ کی پیمائش کرنے کے لیے کچھ دیگر پیمانے درکار ہیں۔ اس قسم کا پیمانہ، انتشاری پیمانہ (Measure of Dispersion) کہلاتا ہے۔

انتشار ایک اہم تصور ہے جو مواد کے پورے سیٹ کے لیے مرکزی رجحان کے عمل کو واحد نمائندہ قیمت کی حیثیت سے پیش کرتا ہے۔ اس خیال کو مندرجہ ذیل مثال کے ذریعے واضح کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ مواد کے تین ایسے سیٹ ہیں جن میں مشاہدات کی تعداد (5) یکساں ہے اور اوسط (12) بھی یکساں ہے لیکن انتشار مختلف ہیں۔

$A_1 = \{12, 12, 12, 12, 12\}$, $d_{1i} = 0, 0, 0, 0, 0$

$A_2 = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, $d_{2i} = -2, -1, 0, 1, 2$

$A_3 = \{1, 5, 14, 19, 21\}$, $d_{3i} = 0, 0, 0, 0, 0$

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

اوسط سے سیٹ A_1 میں ہر رکن کا تغیر یا انتشار صفر ہے کیونکہ ہر رکن اوسط کے مساوی ہے۔ یہ اوسط کے ذریعے مواد کی ایک مکمل نمائندگی کی ایک مثال ہے۔

سیٹ A_3 میں ارکان کا انتشار اس کی اوسط کے لحاظ سے سیٹ A_2 کے انتشار سے بڑا ہے۔ اِس سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ اوسط کے لحاظ سے سیٹ A_1 کے ارکان کی نمائندگی غلطیوں سے پاک ہے لیکن سیٹ A_3 کی نمائندگی غلطیاں سیٹ A_2 کی غلطیوں سے زیادہ ہیں۔

4.23 انتشاری پیمانوں کا استعمال اور اہمیت

(i) انتشار کے پیمانے پوری آبادی کے ڈھانچے کو بیان کرتے ہیں۔ مثلاً اگر کوئی آدمی پڑاؤ کی جگہ منتخب کرتا ہے اور صرف اوسط درجہ حرارت کی معلومات رکھتا ہے تو وہ شخص منجمد یا بھن سکتا ہے اگر وہ درجۂ حرارت کی وسعت (Range) کو نظر انداز کرتا ہے۔

(ii) یہ پیمانے دو یا دو سے زائد ڈیٹا سیٹ کے، اُن کے تغیرات کے لحاظ سے، موازنے میں بہت ہی سود مند ہیں۔

(iii) یہ پیمانے معاشی متغیرات مثلاً آمدنی، برآمدات، قیمتیں، اُجرتیں وغیرہ کی تعددی تقسیم کے مطالعے کے لیے استعمال ہوتے ہیں

(iv) یہ پیمانے تجارتی مصنوعات کے معیار کو برقرار رکھنے میں استعمال ہوتے ہیں۔

4.24 انتشاری پیمانوں کی اقسام

انتشار کے اہم پیمانے یہ ہیں جن پر بحث کی جائے گی۔

(i) وسعت *(Range)* (ii) تغیر *(Variance)* (iii) معیاری انحراف *(Standard Deviation)*

4.24.1 وسعت *(Range)*

ڈیٹا سیٹ میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے درمیان فرق کو وسعت کہتے ہیں۔

4.24.2 خام یا غیر گروہی مواد کے لیے وسعت معلوم کرنا

$$\text{وسعت} = R = X_{max} - X_{min}$$

جبکہ X_{max} ، x کی سب سے بڑی قیمت اور X_{min} ، x کی سب چھوٹی قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 1۔ آٹھ ایک روزہ میچوں کے لیے جاوید میاں داد اور شاہد آفریدی کے بلے بازی کے ریکارڈ یہ ہیں:

جاوید میاں داد : 40 , 45 , 35 , 60 , 33 , 50 , 55 , 42

شاہد آفریدی : 85 , 15 , 10 , 20 , 70 , 10 , 90 , 60

دونوں کی اوسط 45 ہے۔ آپ کس کا انتخاب کریں گے؟

حل: دونوں کھلاڑیوں کی بلے بازی کی اوسط 45 یکساں ہے۔ اس لیے ہمیں اُن کی کارکردگی یا استقامت کے بارے میں کچھ زیادہ معلومات درکار ہیں۔

اگر آپ ایک متوازن کھلاڑی کی تلاش میں ہیں۔ تو جاوید میاں داد منتخب کیا جائے گا۔ اگر آپ اتفاقی کھلاڑی جو کبھی کبھی چمک دمک دکھائے، میں دلچسپی رکھتے ہوں تو شاہد آفریدی منتخب ہوگا۔

یہاں ہمیں وسعت کے تصور کا استعمال مندرجہ ذیل طریقے سے کرنا ہے۔

وسعت = سب سے چھوٹا سکور − سب سے بڑا سکور

جاوید میاں داد کی وسعت = 33 − 60 = 27 دوڑیں

شاہد آفریدی کی وسعت = 10 − 90 = 80 دوڑیں

بڑی وسعت کا مطلب ہے بڑا انحراف، یا کم استقامت

4.24.3 گروہی مواد کے لیے وسعت معلوم کرنا

گروہی مواد کی صورت میں وسعت اس طرح معلوم کی جاتی ہے:

سب سے چھوٹی جماعت کی حقیقی زیریں حد − سب سے بڑی جماعت کی حقیقی بالائی حد = وسعت (R)

مثال 2۔ فصل 4.22 کے ڈیٹا سیٹ A_1 , A_2 اور A_3 کے لیے وسعتیں معلوم کیجیے اور توضیح کیجیے۔

حل: وسعت معلوم کرنا:

سیٹ	سب سے بڑی قیمت X_{max}	سب سے چھوٹی قیمت X_{min}	وسعت
A_1	12	12	12 − 12 = 0
A_2	10	14	14 − 10 = 4
A_3	21	1	21 − 1 = 20

توضیح: سیٹ A_1 میں تمام ارکان ایک دوسرے سے صفر اکائی کے فاصلے پر ہیں لیکن سیٹوں A_2 اور A_3 میں تمام ارکان بالترتیب 4 اور 20 اکائیوں کے فاصلے پر ہیں۔

مثال 3۔ ذیل میں لاڑکانہ اور کراچی کی 200 خواتین کی عمریں شادی کے وقت دی گئیں ہیں۔ اُن کی شادی کی عمروں کی وسعت معلوم کیجیے۔

عمر سالوں میں (x_1) : 16 , 20 , 24 , 28 , 32 , 36

لاڑکانہ میں خواتین کی تعداد (f_1) : 34 , 50 , 60 , 26 , 25 , 5

کراچی میں خواتین کی تعداد (f_2) : 24 , 40 , 60 , 36 , 30 , 10

حل: چونکہ خام مواد کی صورت میں، ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

وسعت = $X_{max} - X_{min}$

= 16 − 36 = 20 سال

یعنی دونوں شہروں میں خواتین کی شادی کی عمروں کی وسعت 20 ہے۔

پس وسعت دیے ہوئے مواد کے سیٹوں کے لیے تغیر پذیری کے موازنے کے مقصد کو پورا نہیں کرتی ہے۔ یہ اُس معلومات کو جو بہتر مشاہدے سے دستیاب ہوتی ہے، نظر انداز کر دیتی ہے۔

مثال 4۔ مندرجہ ذیل گروہی مواد کے لیے وسعت معلوم کیجیے۔

جماعت	6 – 8	9 – 11	12 – 15	16 – 17	18 – 22
تعدد	5	6	7	4	3

حل: پہلا قدم : مواد کو حدود کی شکل میں اس طرح تبدیل کیجیے کہ حقیقی جماعتی حدود حاصل ہوں۔ پس

جماعتی وقفے	5.5 – 8.5	8.5 – 11.5	11.5 – 15.5	15.5 – 17.5	17.5 – 22.5
f	5	6	7	4	3

دوسرا قدم : سب سے چھوٹی جماعت کی حقیقی زیریں حد – سب سے بڑی جماعت کی حقیقی بالائی حد = وسعت

$$22.5 - 5.5 = 17$$

نوٹ : اگر ہم مواد کو حقیقی جماعتی حدود کی شکل میں تبدیل نہیں کرتے ہیں تو وسعت غلط معلوم کی جا سکتی ہے یعنی $22 - 6 = 16$

4.24.4 وسعت کا استعمال اور خصوصیات

(i) یہ معلوم کرنے اور سمجھنے میں آسان ہے۔

(ii) یہ سودمند ہے جب انتہائی قیمتوں کے فرق کا علم مطلوب ہو۔ مثلاً روزانہ کے درجہ حرارت، حصص قیمتیں، ماہانہ بارشیں وغیرہ عام طور پر صرف یہی سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قیمتوں سے بیان کی جاتی ہیں۔

(iii) ہر x_i سے ایک ہی قیمت جمع یا تفریق کرنے سے وسعت پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن اِسے اُسی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے جس عدد سے ہر x_i ضرب یا تقسیم کیا جا چکا ہوتا ہے۔

(iv) اِسے غائب مواد (انتہائی قیمتیں نہیں) کی صورت میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

4.24.5 وسعت کی حدود یا خامیاں

(i) جب n چھوٹا ہو تو وسعت پر بھروسہ نہیں کیا جاتا ہے۔ یہ n , f ، ارکان کی اصل قیمتوں اور جماعتی وقفوں کی جسامت پر نہیں کرتا ہے۔

(ii) یہ دو انتہائی مشاہدوں پر انحصار کرتا ہے اس لیے مواد میں پھیلاؤ کی غلط تصویر پیش کرتا ہے۔

(iii) انتہائی قیمتوں کے درمیان دیگر ارکان کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا وسعت سے اظہار نہیں ہوتا ہے۔

(iv) مزید ریاضیاتی عمل ممکن نہیں ہے۔

(v) ماہیتی مواد کے لیے اِسے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

4.25 تغیریت (*Variance*):

تغیر (*Variance*) وہ واحد قیمت ہے جو موادنوع میں حسابی اوسط سے لیے گئے انحرافوں کے مربعوں کے مجموعہ کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔(حسابی اوسط سے تمام مشاہدات کے انحرافوں کے مربعوں کا حسابی اوسط) اِسے σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یعنی

$$\text{تغیر} = \sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum d_i^2}{n} \qquad \text{(انحرافی طریقہ)}$$

$$\text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{\sum D_i^2}{n} - \left(\frac{\sum D_i}{n}\right)^2 \qquad \text{(مختصر طریقہ)}$$

$$\text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \qquad \text{(راست طریقہ)}$$

جبکہ $D_i = x_i - A$

اور A عارضی اوسط (موزوں قیمت جو پہلے ہی منتخب کی گئی ہو)

چونکہ تغیر انحرافوں کے مربعوں پر انحصار کرتا ہے اس لیے یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے متعلق سوال کے لیے مشکل پیدا نہیں کرتا ہے۔ σ کو سگما (یونانی) پڑھتے ہیں۔

4.26 معیاری انحراف

4.26.1 معیاری انحراف معلوم کرنا

معیاری انحراف (*Standard Division*) تغیر کا مثبت جذر المربع ہے اسے (S.D) سے ظاہر کیا جاتا ہے یہ حسابی اوسط کے گرد پھیلے ہوئے اوسط کی پیمائش ہے۔

معیاری انحراف معلوم کرنے کے تین طریقوں کی وضاحت مثال 1 میں کی گئی ہے۔

مثال1۔ آٹھ کسان چاول اگاتے ہیں۔اُن کی پیداوار من فی ایکڑ یہ ہے: 21 , 17 , 13 , 25 , 9 , 19 , 6 , 10

اُن کی پیداوار کا تغیر اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل: (i) انحرافی طریقہ

سب سے پہلے ہمیں حسابی اوسط x معلوم کرنا ہے۔ پھر ہم d_i , d_i^2 اور $\frac{\sum d_i^2}{n}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = \frac{120}{8} = 15 \text{ من فی ایکڑ}$$

تغیر کے لیے جدول:

من فی ایکڑ	$d_i = x_i - \overline{x}$ $= x_i - 15$	d_i^2
21	6	36
17	2	4
13	−2	4

100	10	25
36	-6	9
16	4	19
81	-9	6
25	-5	10
$\sum d_i^2 = 302$	$\sum d_i = 0$	$\sum x_i = 120$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n} = \frac{302}{8} = 37.75$$

$$\text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 37.75 = 6.14$$ (من فی ایکڑ)

(ii) مختصر طریقہ :

ہم $A = 13$ لیتے ہیں۔ پھر تغیر کے لیے جدول یہ ہے:

D_i^2	$D_i = x_i - A$	x_i
64	8	21
16	4	17
0	0	13
144	12	25
16	-4	9
36	6	19
49	-7	6
9	-3	10
$\sum D_i^2 = 334$	$\sum D_i = 16$	کل تعداد

پس

$$\sigma^2 = \frac{\sum D_i^2}{n} - \left(\frac{\sum D_i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{334}{8} - \left(\frac{16}{8}\right)^2 = 41.75 - 4 = 37.75$$

$$\text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 37.75 = 6.14$$ (من فی ایکڑ)

نوٹ : طلباء پڑتال کر سکتے ہیں کہ اگر A کی مختلف قیمتیں لی جائیں تو نتیجے میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

(iii) راست طریقہ :

x_i	21	17	13	25	9	19	6	10
x_i^2	441	289	169	625	81	361	36	100

یہاں ، $\Sigma x_i = 120 \quad ,\Sigma x_i^2 = 2102$

پس $$\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{2102}{8} - \left(\frac{120}{8}\right)^2 = 262.75 - 225 = 37.75$$

نکتہ : مختلف طریقے استعمال کرنے پر ہمیں ہمیشہ ایک ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2۔ ایک تجارتی ادارہ کے دو شعبوں ہر ایک میں سات کارکن کام کرتے ہیں ہر سات ملازمین کے لیے دن بھر میں چائے کے وقفوں کی تعداد مندرجہ ذیل ہے۔

پیداواری شعبے کے لیے 1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 4 اور 7 اور شعبۂ بار برداری کے لیے 2 , 3 , 1 , 2 , 3 , 5 اور 5 ہر ایک شعبہ میں کارکنوں کے چائے کے وقفوں کی تعداد کے لیے تغیر اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل:

(i) راست طریقہ:

پیداواری شعبہ x_{1i}	شعبۂ بار برداری x_{2i}	x_{1i}^2	x_{2i}^2
1	2	1	4
1	3	1	9
2	1	4	1
3	2	9	4
3	3	9	9
4	5	16	25
7	5	49	25
$\Sigma x_{1i} = 21$	$\Sigma x_{2i} = 21$	$\Sigma x_{1i}^2 = 89$	$\Sigma x_{2i}^2 = 77$

پس پیداواری شعبے کے لیے

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_{1i}^2}{n} - \left(\frac{\sum x_{1i}}{n}\right)^2$$
$$= \frac{89}{7} - \left(\frac{21}{7}\right)^2 = 12.71 - 9 = 3.71$$
$$\text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3.71} = 19.3$$

اور شعبۂ بار برداری کے لیے

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_{2i}^2}{n} - \left(\frac{\sum x_{2i}}{n}\right)^2$$
$$= \frac{77}{7} - \left(\frac{21}{7}\right)^2 = 11 - 9 = 2$$
$$\text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2} = 1.41$$

(i) انحرافی طریقہ:

	x_{1i}	x_{2i}	$d_{1i} = x_{1i} - 3$	$d_{2i} = x_{2i} - 3$	d_{1i}^2	d_{2i}^2
	1	2	–2	–1	4	1
	1	3	–2	0	4	0
	2	1	–1	–2	1	4
	3	2	0	–1	0	1
	3	3	0	0	0	0
	4	5	1	2	1	4
	7	5	4	2	16	4
میزان	21	21	0	0	26	14

پس $\sigma_1^2 = \frac{\sum d_{1i}^2}{n} = \frac{26}{7} = 3.71 \; ; \; \sigma_1 = 1.93$

اور $\sigma_2^2 = \frac{\sum d_{2i}^2}{n} = \frac{14}{7} = 2 \; ; \; \sigma_2 = 1.41$

نکتہ : چونکہ اعداد زیادہ بڑے نہیں ہے اس لیے مختصر طریقہ کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

4.26.2 معیاری انحراف کا استعمال اور خصوصیات

(i) یہ تمام مشاہداتی قیمتوں کو استعمال میں لاتا ہے لیکن انتہائی قیمتوں سے اثر انداز ہوتا ہے۔

(ii) پیمائش کے مشاہدات کی معیاری قیمتوں کو معلوم کرنے کے لیے اِسے استعمال کیا جاتا ہے۔

یعنی مشاہدات کے اوسط سے کسی دی گئی قیمت کا انحراف، معیاری انحراف کی شکل میں $\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ کے ذریعے، پیائش کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

(iii) منحرفوں کے بہت سے اضعاف اور اوسط کے مجموعوں کے درمیان آنے والے ارکان کی فی صد کی وضاحت کرتا ہے۔ کم از کم 75 فی صد ارکان $\bar{x} - 2\sigma$ اور $\bar{x} + 2\sigma$ کے درمیان موجود ہوں گے۔ اسی طرح 90 فی صد سے زیادہ ارکان $\bar{x} - 3\sigma$ اور $\bar{x} + 3\sigma$ کے درمیان موجود ہوں گے۔

مثال کے طور پر مواد کے سیٹ 2 , 4 , 8 , 10 جبکہ اوسط $\bar{x} = 6$ اور $\sigma = \sqrt{10} = 3.16$ کے لیے 2 , 4 , 8 اور 10 کی معیاری قیمتیں بالترتیب یہ ہیں:

$$\frac{2-6}{3.16} , \frac{4-6}{3.16} , \frac{8-6}{3.16} , \frac{10-6}{3.16}$$ یعنی $-1.26 \; , \; -0.63 \; , \; 0.63 \; , \; 1.26$

حالانکہ مواد کے سیٹ 3 , 5 , 7 , 9 جس کی اوسط $\bar{x} = 6$ اور $\sigma = \sqrt{5} = 2.24$ کے لیے 3 , 5 , 7 , 9 کی معیاری قیمتیں بالترتیب یہ ہیں:

$$\frac{3-6}{2.24} , \frac{5-6}{2.24} , \frac{7-6}{2.24} , \frac{9-6}{2.24}$$ یعنی $-1.34 \; , \; -0.4461 \; , \; 0.446 \; , \; 1.34$

نوٹ : ایک ہی اوسط لیکن مختلف معیاری انحرافوں یا ایک ہی معیاری انحراف لیکن مختلف اوسط رکھنے والی مختلف تعددی تقسیم سے تعلق رکھنے والی انفرادی قیمتوں کے درمیان موازنے کے لیے یہ قیمتیں بنیاد فراہم کرتی ہے۔

(iv) ایک ہی جیسی قیمتوں کا معیاری انحراف صفر ہوتا ہے۔ مثلاً اگر $x_i = 2, 2, 2, 2, 2$ تو $d_i = 0, 0, 0, 0, 0$ پس S.D. = 0

4.26.3 معیاری انحراف (S.D.) کی حدود

(i) ماہیتی مواد کے لیے اِسے معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے۔

(ii) یہ مختلف اکائیوں یا پیمانوں میں ناپی گئیں اشیاء کے موازنے کے مقصد کو پورا نہیں کرتا ہے۔

(iii) اُن اشیاء کو زیادہ وزن دیتا ہے جن کی قیمتیں اوسط سے دور ہوں۔

نوٹ: بڑے معیاری انحراف کے معنیٰ ہیں زیادہ انتشار یا تغیر اور مواد کی کم استقامت، صفر معیاری انحراف کے معنیٰ ہیں کوئی انتشار یا تغیر نہیں۔ چھوٹا معیاری انحراف ظاہر کرتا ہے کہ اکثر مشاہدات اوسط سے قریب تر ہیں۔

مثال 3۔ 9 ادویات کے اوزان (گرام میں) ذیل میں دیے گئے ہیں:

45 , 51 , 52 , 50 , 47 , 58 , 44 , 45 , 54

اوسط $(\bar{x})$ اور معیاری انحراف (S) معلوم کیجیے۔

نیز حدود $(\bar{x} \pm S)$ ، $(\bar{x} \pm 2S)$ اور $(\bar{x} \pm 3S)$ میں مشاہدات کی فی صد معلوم کیجیے۔

حل:

ادویات (گرام میں) x	54	45	44	57	47	60	52	51	40
x^2	2916	2025	1936	3249	2209	3600	2704	2601	1600

ہم پہلے اوسط معلوم کرتے ہیں۔ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{450}{9} = 50$

$$S.D. = S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22840}{9} - \left(\frac{450}{9}\right)^2} = \sqrt{2537.78 - 2500} = \sqrt{37.78} = 6.146$$

اب ہم حدود معلوم کرتے ہیں۔

(الف) $(\bar{x} \pm S) = 50 \pm 6.146 = 56.146$ اور 43.854

حدود 43.854 اور 56.146 میں چھ قیمتیں موجود ہیں یعنی {54, 45, 44, 47, 52, 51}

$(x \pm S)$ میں قیمتوں کا فی صد $= \frac{6}{9} \times 100 = 66.66$ یا 67

(ب) $(\bar{x} \pm 2S) = 50 \pm 2\,(6.146) = 62.292$ اور 37.707

چونکہ تمام قیمتیں حدود 37.707 اور 62.292 میں موجود ہیں۔ اس لیے

$(\bar{x} \pm 2S)$ میں قیمتوں کا فی صد $= \frac{9}{9} \times 100 = 100$

(ج) $(\bar{x} \pm 3S) = 50 \pm 3\,(6.146) = 68.438$ اور 31.562

چونکہ اِن حدود میں تمام قیمتیں آجاتی ہیں اس لیے ان کی فی صد بھی 100 ہے۔

مثال 4۔ دو اعداد کا حسابی اوسط 13 ہے اور ان کا معیاری انحراف 3 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ x اور y مطلوبہ اعداد ہیں۔ تو

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{x+y}{2}$$

یعنی $\frac{x+y}{2} = 13$

$$x + y = 26 \quad \dots (i)$$

$$\text{معیاری منحرف} = \sqrt{\frac{(x-13)^2 + (y-13)^2}{2}}$$

یعنی $3 = \sqrt{\frac{(x-13)^2 + (y-13)^2}{2}}$

$$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 18 \quad \dots (ii)$$

مساواتیں (i) اور (ii) حل کرنے سے ہمیں دو اعداد 16 اور 10 حاصل ہوتے ہیں۔

مشق 4.4

-1 وسعت کیا ہے؟ اسے کیسے معلوم کرتے ہیں؟

-2 پیمائش کے ایک سیٹ کی وسعت معلوم کیجیے:

26.28, 9, 1.13, 4.45, 16.24, 9.1, 28, 14, 25, 3.12, 21.25

-3 تغیر کی تعریف کیجیے اور اسے معلوم کرنے کا کوئی طریقہ بتایئے۔

-4 مندرجہ ذیل مشاہدات کے سیٹوں کا تغیر معلوم کیجیے۔

(i) $x = 11, 13, 25, 15, 12, 18, 17, 23, 20, 16$

(ii) $y = 115, 108, 95, 118, 130, 114, 116, 120$

-5 معیاری انحراف کیا ہے؟ اسے معلوم کرنے کا کوئی طریقہ بتایئے۔

-6 8 طلباء نے دو مضامین میں مندرجہ ذیل نمبر (200 میں سے) حاصل کیے ہیں۔

طلباء	1	2	3	4	5	6	7	8
نمبر (اردو میں)	145	142	133	138	147	151	135	160
نمبر (شہریت)	148	150	141	135	150	161	142	162

ہر ایک مضمون میں حاصل کردہ نمبروں کے معیاری انحرافوں کا موازنہ کیجیے۔

-7 وسعت معلوم کیجیے:

$X = 10, 30$; $Y = 10, 22, 30$; $Z = 120, 122, 130, 135, 140$

کیا وسعت پر ارکان کی تعداد کا کوئی اثر ہے؟

کیا ارکان کی ابتدائی اور آخری قیمتوں کا کوئی اثر ہے؟

-8 دو اعداد معلوم کیجیے اگر

(i) اُن کا اوسط 23 اور معیاری انحراف 5 ہے۔

(ii) اُن کا تغیر 4 اور اوسط 7 ہے۔

(iii) اُن کا معیاری انحراف 2 اور اوسط 7 ہے۔

(iv) اُن کی وسعت 2 اور اوسط 7 ہے۔

-9 مندرجہ ذیل معلومات سے تغیر اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

$\bar{x} = 19.5$, $n = 10$, $\Sigma x^2 = 5555$

-10 16 بچوں کے قد (سینٹی میٹر میں) ذیل میں دیے گئے ہیں:

66, 72, 64, 65, 71, 67, 65, 63, 69, 63, 64, 63, 66, 62, 67, 64

اوسط اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔ حدود $(\bar{x} \pm 1S)$, $(\bar{x} \pm 2S)$, $(\bar{x} \pm 3S)$ میں پائی جانے والی مشاہدات کی فیصد معلوم کیجیے۔

11۔ 1 سے 16 تک متواتر جفت اعداد کا تغیر 21 ہے۔ 1 سے 16 تک متواتر طاق اعداد کا تغیر معلوم کیجیے۔

12۔ $X = 10, 20, 30$; $Y = 10, 20, 20, 30$

$Z = 10, 10, 20, 20, 30, 30$; $W = 10, 10, 15, 25, 30, 30$

(الف) ہر صورت میں اوسط، وسطانیہ، عادہ اور وسعت معلوم کیجیے۔

(ب) W میں ذیل کے عوامل کے بعد حسابی اوسط، وسطانیہ، عادہ، وسعت اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

(i) ہر رکن میں 5 جمع کرنے سے

(ii) ہر رکن سے 5 تفریق کرنے سے

(iii) ہر رکن کو 4 سے ضرب دینے سے

(ج) X میں ذیل کی دو قیمتیں شامل کرتے ہوئے حسابی اوسط، وسطانیہ، عادہ، وسعت اور معیاری انحراف پر ہونے والا اثر معلوم کیجیے۔

(i) نسبتاً بڑی قیمتیں یعنی 50 اور 60

(ii) نسبتاً چھوٹی قیمتیں یعنی 0 اور 2

متفرق مشق III

1۔ ہم مواد کو جامع شکل میں کیوں پیش کرتے ہیں، مختصراً بیان کیجیے؟

2۔ ذیل میں 30 طلباء کے اوزان تقریباً کلوگرام میں ریکارڈ کیے گئے ہیں۔

52, 48, 36, 47, 40, 58, 46, 57, 49, 25, 44, 32, 50, 64, 38,

53, 35, 47, 12, 73, 46, 65, 54, 19, 63, 76, 38, 26, 68, 44

جماعتی وقفے کی جسامت 6 لیتے ہوتے تعددی جدول بنائیے۔ نیز تعددی کثیر الاضلاع بنائیے۔

3۔ کمپیوٹر سائنس میں 135 طلباء کے حاصل کردہ نمبر ذیل میں دیے گئے ہیں۔

نمبر	(20–24)	(25–29)	(30–34)	(35–39)	(40–44)	(45–49)
طلباء	25	28	32	25	13	12

مندرجہ بالا جدول کے لحاظ سے مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) پانچویں جماعت کی حقیقی بالائی جماعتی حد

(ii) آخری جماعت کی حقیقی زیریں جماعتی حد

(iii) دوسری جماعت کا وسطی نقطہ (iv) جماعتی وقفہ کی جسامت

(v) چوتھی جماعت کا تعدد (vi) سب کم تعدد والا جماعتی وقفہ

- مندرجہ تعددی تقسیم میں خاص قسم کی رسیوں سے اٹھایا گیا زیادہ سے زیادہ وزن (کلوگرام میں) دکھایا گیا ہے۔ مختصر طریقے اور کوڈنگ کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ وزن کا اوسط معلوم کیجیے۔

رسیوں کی تعداد	زیادہ سے زیادہ وزن (کلوگرام میں)
2	193 — 197
5	198 — 202
8	203 — 207
12	208 — 212
6	213 — 217
2	218 — 222

- طلحہٰ نے لوڈو کے دو پانسے آٹھ مرتبہ پھینکے۔ ہر مرتبہ نقطوں کا مجموعہ کچھ اس طرح ریکارڈ کیا گیا:
8 ,5 ,11 ,3 ,6 ,6 ,9 ,4 نقطوں کے مجموعوں کا وسطانیہ اور عادہ معلوم کیجیے۔

- 10 مشاہدات کے سیٹ کے لیے اوسط 20 ہے۔ پڑتال کرنے پر دریافت ہوا کے مشاہدہ 19 غلطی سے ریکارڈ ہو گیا تھا جبکہ صحیح قیمت 23 تھی۔ معلومات سے صحیح اوسط معلوم کیجیے۔

- غیر مسلسل متغیر اور مسلسل متغیر کے درمیان فرق واضح کیجیے۔ ذیل میں متغیرات کو غیر مسلسل یا مسلسل متغیرات میں الگ الگ کیجیے۔

(الف) کسی جماعت میں طلباء کی تعداد

(ب) دو سکوں کو اچھالنے میں عدد والے حصے (*Tail*) کی تعداد

(ج) لوڈو کے 3 پانسے پھینکنے میں چار کی تعداد

(د) بکری کے دودھ کی روزانہ کی پیداوار

(س) بلبوں (*Bulbs*) کی زندگی

8۔ (الف) کیا مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے ہم حسابی اوسط معلوم کر سکتے ہیں؟

(i) A = {سُستی، ایمانداری، امیری، محنت، ذہانت}

(ii) B = {Rs. 30 ، 50 پیسے، 70 پونڈ، 80 ڈالر}

(iii) C = {2 مہینے ، 5 دن ، 6 سال ، 10 گھنٹے، 20 منٹ}

(iv) D = {مغرب، مشرق، جنوب، شمال}

(ب) مندرجہ بالا مواد کا وسطانیہ یا عادہ ہم معلوم کر سکتے ہیں؟

9۔ انتشار کا مفہوم بیان کیجیے۔ انتشار کی اقسام کون سی ہیں؟ انتشار کو پیمائش کرنے کا کوئی طریقہ بیان کیجیے۔

10۔ ایک کالج کی عمارت چھ منزلہ ہے۔ ہر منزل میں جماعتوں کی تعداد یہ ہے:

13 , 14 , 11 , 12 , 15

(i) مواد میں معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

(ii) مندرجہ بالا مواد میں ہر عدد میں سے 3 تفریق کیجیے۔ اب نئے حاصل شدہ مواد کا معیاری منحرف معلوم کیجیے۔

11۔ مبشرہ اپنی آمدنی کا 40% خوراک پر خرچ کرتی ہے۔ 25% بجلی اور کپڑوں پر ، 15% اپنی سہیلیوں پر اور باقی متفرق معاملات پر خرچ کرتی ہے۔ اخراجات کو پائی گراف میں پیش کیجیے۔

12۔ دو ساجھی عمارہ اور عبدالعلی ایک تجارتی ادارہ چلاتے ہیں۔ ادارے میں کام کرنے والے ملازمین کی ہفتہ وار اُجرتیں (روپوں میں) یہ ہیں۔

اُجرتیں (روپوں میں)	400–600	600–800	800–1000	1000–1200	1200–1400
ملازمین	5	7	11	21	6

حسابی اوسط معلوم کیجیے اگر:

(i) $D = x - 900$ (ii) $D = x - 700$ (iii) $u = \frac{x - 1100}{200}$

13۔ چار سہیلیوں عالیہ، نازیہ، رانی اور صبا نے چھ مرتبہ لوڈو کے دو پانسے علیحدہ علیحدہ پھینکے ہر مرتبہ اُن کا حاصل ضرب ذیل میں ریکارڈ کیا گیا تھا:

عالیہ : 1 ,3 ,9 ,36 ,16 ,36 نازیہ : 4 ,6 ,16 ,25 ,3 ,9

رانی : 4 ,2 ,6 ,16 ,4 ,5 صبا : 1 ,1 ,3 ,36 ,2 ,9

14۔ ایک تعددی تقسیم میں $\bar{x} = 34.6$ اور عادہ = 30.8 کے لیے وسطانیہ معلوم کیجیے۔

پڑتال کیجیے کہ وسطانیہ، حسابی اوسط اور عادہ کے درمیان میں ہے۔

(اشارہ : اوسط 2 – وسطانیہ 3 = عادہ)

15۔ x_1 اور x_2 معلوم کیجیے اگر $n = 2$ ، اور

(i) تغیر $= 2$ ؛ $\bar{x} = 7$ (ii) وسعت $= 2$ ؛ $\bar{x} = 7$ (iii) معیاری انحراف $= 5\sqrt{2}$ ؛ $\bar{x} = 23$

16۔ مندرجہ ذیل قدرتی اعداد کا تغیر اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

(i) 1 سے 11 تک (ii) 56 سے 62 تک (iii) 1 سے 22 تک

17۔ مشاہدات کے نمونہ (*sample*) کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے جبکہ اس کا:

(i) معیاری انحراف = 0 (ii) وسعت = 0 (iii) عادہ = 0

(iv) وسطانیہ = 0 (v) حسابی اوسط = 0 ؟

18۔ ذیل میں اگر بیان صحیح ہے تو ص لکھیے اور اگر غلط ہے تو غ لکھیے۔

(i) عادہ < وسطانیہ < اوسط (ii) معیاری انحراف = تغیر

(iii) کسی جماعت وقفے کی جسامت اُس جماعت کا تعدد کہلاتی ہے۔

(iv) کسی مواد میں درمیانی رقم وسطانیہ ہوتی ہے۔

(v) کسی غیر گروہی مواد میں دی گئی قیمتوں کو ضرب دینے سے عادہ حاصل ہوتا ہے۔

(vi) ہر مہینے سڑک کے حادثوں کی تعداد غیر مسلسل متغیر ہے۔

(vii) اسکول میں اساتذہ کی تعداد مسلسل متغیر ہے۔

(viii) وہ جماعت جو سب سے زیادہ تعدد رکھتی ہے، عادہ جماعت کہلاتی ہے۔

(ix) کسی سلسلہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو وسعت کہتے ہیں۔

(x) منفی اعداد کا معیاری انحراف معلوم نہیں کیا جاسکتا۔

(xi) ماہیتی مواد کا معیاری انحراف معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(xii) اگر ایک رقم صفر ہے تو

(الف) وسعت بھی صفر ہے (ب) اوسط بھی صفر ہے (ج) عادہ بھی صفر ہے۔

19۔ مندرجہ بیانات مکمل کیجیے۔

(i) جماعتوں کے وسطی نقاط اور ان کے تعددات کے مجموعے کو ________ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) $\bar{x}$ سے لیے گئے انحرافوں کا مجموعہ ________ کے برابر ہوتا ہے۔

(iii) جب مواد کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھا جاتا ہے طاق مشاہدات کی درمیانی رقم ________ کہلاتی ہے۔

(iv) سلسلہ 4 , 4 , 4 , 4 ; 4 , 4 , 4 میں تغیر ________ ہے۔

(v) ایک متغیر کی مختلف قیمتیں 19, 21, 25, 14, 26, 36 ہیں تو وسعت ________ ہے۔

(vi) معیاری انحراف کا ________ تغیر ہے۔

(vii) اگر $\Sigma D = 125$ ، $A = 25$ اور $n = 5$ تو $\bar{x}$ ________ ہے۔

(viii) $x = 6$ ، $n = 5$ تو $A = \{1, 3, 8, 10\}$

(ix) { بہت ہی برا ، برا ، اچھا } = B ؛ وسطانیہ = ________

20۔ کالم I کے ہر بیان کو کالم II میں دی گئی صحیح رقم سے ملائیے۔ صحیح جواب کے لیے A , B , C وغیرہ نام دیں۔

	کالم I		کالم II
(i)	(16–20) میں جماعتی وقفہ کی جسامت ہے	A	4
(ii)	(24–30) میں وسطی نقطہ ہے	B	3
(iii)	100, 10, 4, 1, 0 میں وسطانیہ ہے	C	$\Sigma(x-\bar{x})$
(iv)	9, 9, 3, 3, 3 میں عادہ ہے	D	$\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$
(v)	40, 21, 6, 4, 25 میں وسعت ہے	E	Σf
(vi)	اوسط سے انحرافوں کا مجموعہ ہے	F	صفر
(vii)	معیاری انحراف ہے	G	36
(viii)	تعددی تقسیم کا اوسط ہے	H	$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$
(ix)	–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 میں اوسط ہے	I	27
(x)	تعددات کا مجموعہ ہے	J	5

21۔ ہر سوال کا صحیح جواب منتخب کیجیے۔

(i) 12 ,13 ,4 ,4 ,5 ,7 ,9 میں عادہ ________ ہے۔

(a) 3 , (b) 5.5 , (c) 4 , (d) 9

(ii) 35 ,30 ,10 ,48 ,100 ,90 میں وسعت ہے۔

(a) 35 , (b) 10 , (c) 90 , (d) 10

(iii) دس مشاہدات کا مجموعہ 125 ہے۔ اوسط ________ ہے۔

(a) 125 , (b) 50 , (c) 75 , (d) –15

(iv) 30 مشاہدات کا اوسط 100 ہے۔ اُن کا مجموعہ ________ ہے۔

(a) 1500 , (b) 3000 , (c) 1000 , (d) 900

(v) ایک سلسلہ میں قیمتیں 15 ,19 ,13 ,11 ,14 ,16 ہیں۔ اس کا وسطانیہ ________ ہے۔

(a) 12 , (b) 13 , (c) 14 , (d) 14.5

(vi) ایک سلسلہ میں قیمتیں 14 ;14 ,14 ,14 ,14 ,14 ,14 ,14 ہیں اس کا معیاری انحراف ________ ہے۔

(a) 4 , (b) 1 , (c) 0 , (d) 210

(vi) 20 رقموں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان کا اوسط ________ ہے۔

(a) 50 , (b) –10 , (c) 0 , (d) 2

(vii) اگر ایک سلسلے کا معیاری انحراف 4 ہے تو اس کا تغیر ________ ہے۔

(a) 20 , (b) 36 , (c) 16 , (d) 2

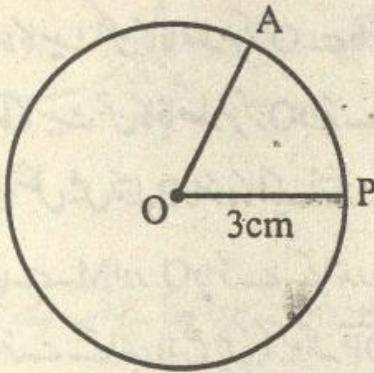
علم ہندسہ کے بنیادی تصورات

ہم پہلے ہی دائرے کے رداس، قطر اور محیط کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ دائرے سے متعلق مزید تصورات ذیل میں دیے جا رہے ہیں۔

5.1 دائرہ

دائرہ (Circle) مستوی (Plane) کے ایسے نقاط کا سیٹ ہے جو مستوی کے مقررہ نقطے سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

مقررہ نقطہ دائرے کا مرکز (Centre) کہلاتا ہے اور اِس نقطہ کو دائرے پر کسی نقطہ سے ملانے والا قطعۂ خط رداسی قطعہ (Radial Segment) کہلاتا ہے۔ دائرے پر کسی نقطے اور اس کے مرکز کا فاصلہ دائرے کا رداس (Radius) کہلاتا ہے۔

اس شکل میں دائرے کا مرکز O ہے۔

$\overline{OP}$ رداسی قطعہ ہے۔ اسی طرح $\overline{OA}$ بھی دوسرا رداسی قطعہ ہے۔

اس دائرے کا رداس $m\overline{OP} = 3cm$ ہے۔

ذہن نشین کر لیجیے کہ:

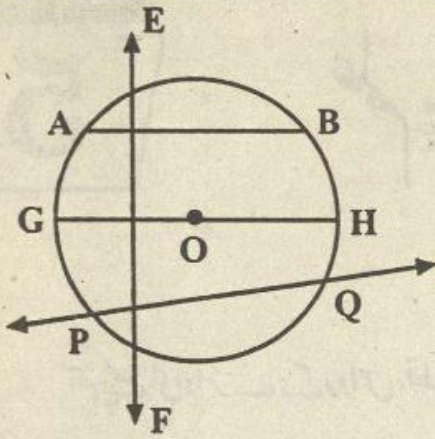
(i) دائرے کا مرکز دائرے کا کوئی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔

(ii) دائرے کے تمام رداسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) ہر دائرے کا صرف ایک ہی مرکز ہوتا ہے۔

(iv) رداس ایک عدد ہے اور رداسی قطعہ ایک ہندسی شکل ہے۔

5.2 دائرہ کا محیط

دائرے کے تمام نقاط کو ملانے والے خط مُنحنی (Curve) کی لمبائی دائرے کا محیط (Circumference) کہلاتی ہے۔

5.3 وتر اور قاطع

ایسا قطعہ خط جس کے سرے دائرے کے کوئی بھی دو نقاط ہوں، دائرے کا وتر (Chord) کہلاتا ہے۔ لیکن کوئی خط دائرے کو دو مختلف نقاط پر قطع کرے وہ قاطع (Secant) کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں $\overline{GH}, \overline{AB}$ وتر ہیں جبکہ خطوط $\overleftrightarrow{EF}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ قاطع ہیں۔

5.4 دائرے کا قُطر

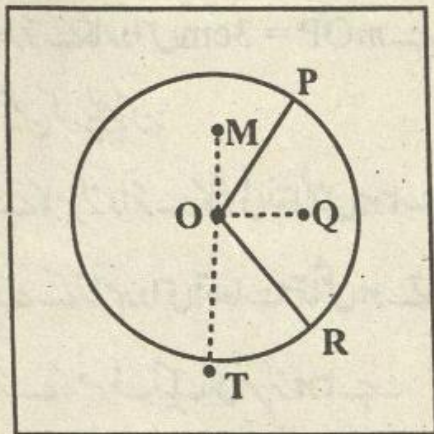
ایسا وتر جو دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے، قُطر (Diameter) کہلاتا ہے۔ مندرجہ بالا شکل میں صرف GH قُطر ہے۔ اِس شکل سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ دائرہ کا قُطر کی پیمائش اس کے رداس کی پیمائش سے دُگنی ہوتی ہے۔

5.5 دائرے کا اندرونہ اور بیرونہ

مستوی میں اگر ایک دائرہ مرکز (مثلاً O) کے ساتھ کھینچا جائے تو مستوی کے نقاط کے سیٹ کو تین غیر مشترک (Disjoint) تحتی سیٹوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی

(i) ایسے نقاط کا سیٹ جن کا فاصلہ دائرے کے رداس کے مساوی ہو، دائرہ ہی کہلاتا ہے

(ii) ایسے نقاط کا سیٹ جن کا فاصلہ مرکز O سے دائرے کے رداس سے کم ہو، دائرے کا اندرونہ (Interior) کہلاتا ہے۔

(iii) ایسے نقاط کا سیٹ جن کا فاصلہ مرکز O دائرے سے رداس سے زیادہ ہو، دائرے کا بیرونہ (Exterior) کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں نقطہ P دائرہ کا ایک نقطہ ہے، $m\text{OP}$ اس کا رداس ہے۔ M اور Q دائرے کے اندرونہ کے نقاط ہیں (یا وہ دائرے کے اندر واقع ہیں) کیونکہ $m\overline{OQ} \angle m\overline{OP}$ اور $m\overline{OM} < m\overline{OP}$ اس کے برعکس نقاط R اور T دائرے کے بیرونہ میں ہیں۔ (یا دائرے سے باہر واقع ہیں) کیونکہ

$m\overline{OT} > m\overline{OP}$ اور $m\overline{OR} > m\overline{OP}$

5.6 دائرے کی قوس

دائرے کا کوئی جز یا حصہ دائرے کی قوس (arc) کہلاتا ہے۔

5.7 نصف دائرہ

دائرے کا ایسا حصہ جو قطر سے قطع ہوتا ہے، نصف دائرہ (semi circle) کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں قطر $\overline{AB}$ دائرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے ہر ایک نصف دائرہ ہے۔

5.8 قوس صغیرہ، قوس کبیرہ

ایسی قوس جو دائرے سے چھوٹی ہو، قوس صغیرہ *(Minor Arc)* کہلاتی ہے۔ سامنے کی شکل میں قوس AB، جیسے $\widehat{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، قوس صغیرہ ہے۔

ایسی قوس جو نصف دائرے سے بڑی ہو، قوس کبیرہ *(Major Arc)* کہلاتی ہے۔ سامنے کی شکل میں قوس ACB، جسے $\widehat{ACB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، اس دائرے جس کا مرکز O ہے، کی قوس کبیرہ ہے۔

5.9 قوس کا مرکزی زاویہ

دائرے کے مرکز پر کسی قوس کے مقابل بننے والا زاویہ قوس کا مرکزی زاویہ *(Central Arc)* کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں زاویہ AOB، جس کی پیمائش Θ ہے، مرکز O پر $\widehat{AB}$ کے مقابل ہے، قوس صغیرہ کا AB کا مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح زاویہ جس کی پیمائش x ہے مرکز O پر $\widehat{ACB}$ کے مقابل ہے قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔

5.10 متماثل دائرے

دو دائرے متماثل *(Congruent)* کہلاتے ہیں۔ اگر ان کے رداس مساوی ہوں۔ ہر دائرہ اپنے آپ سے متماثل ہوتا ہے جسے ذاتی تماثل *(Identity Congruent)* کہتے ہیں۔

5.11 متماثل قوسیں

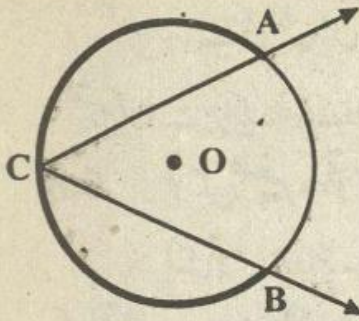
دو قوسیں:

(i) جو ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) پر واقع ہوں اور

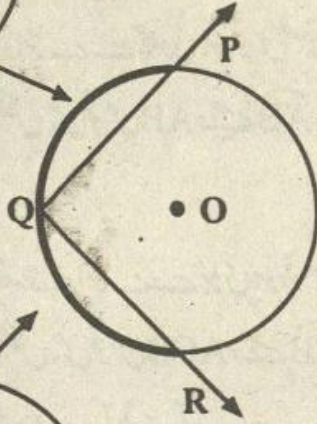
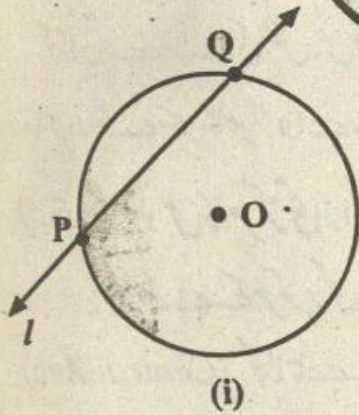
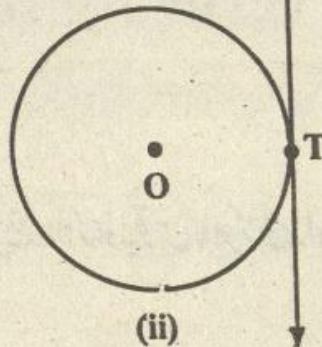
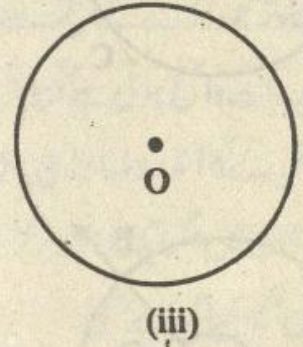
(ii) اُن کے مرکزی زاویے متماثل ہوں۔

متماثل قوسیں *(Congruent Arcs)* کہلاتی ہے۔

5.12 قوس کا محصور زاویہ

ایک زاویہ قوس کا محصور زاویہ (Inscribed Angle of an arc) کہلاتا ہے اگر:

(i) زاویے کے بازو قوس کے سروں سے گزرتے ہوں اور

(ii) زاویے کا راس سروں کے علاوہ قوس کا کوئی سا نقطہ ہو۔

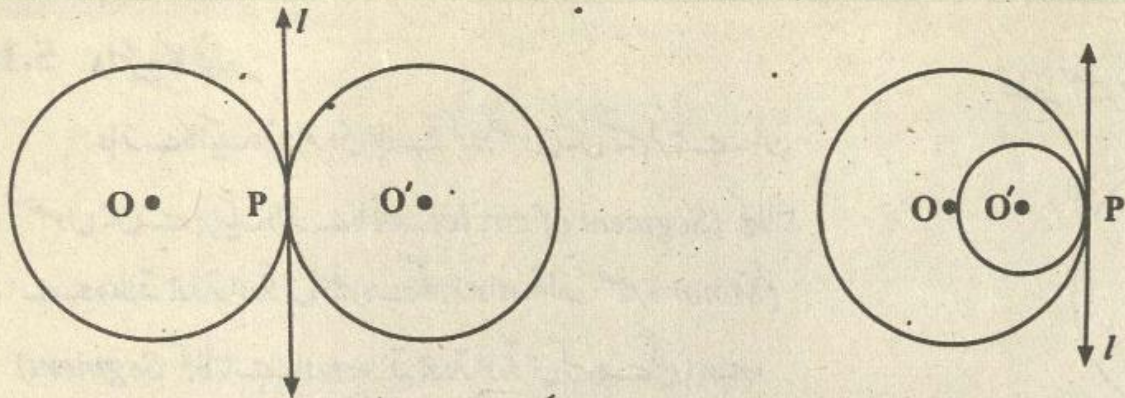
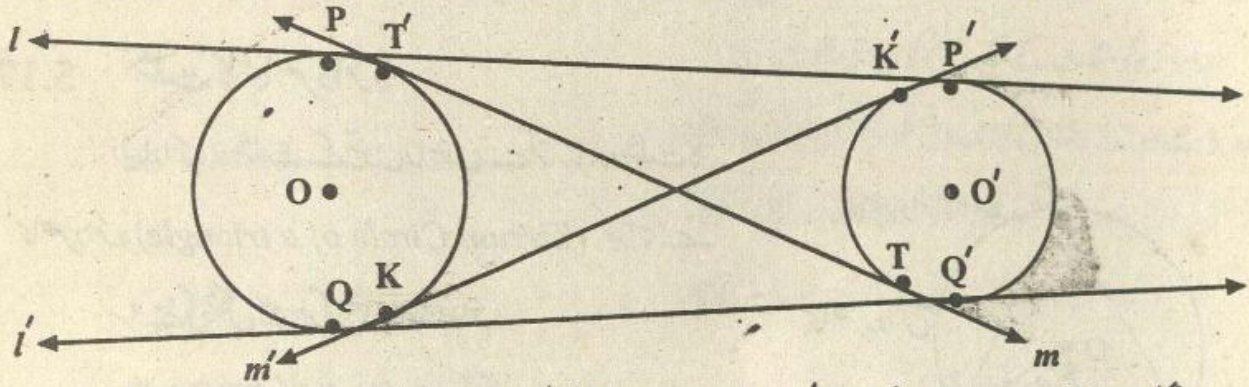
سامنے کی شکلوں میں ACB ∠ قوس $\widehat{AB}$ کا محصور زاویہ ہے اور PQR∠ قوس $\widehat{PR}$ کا محصور زاویہ ہے۔

5.13 مماس اور نقطہ مماس

اگر ایک دائرہ اور ایک خط مستوی میں واقع ہوں تو مندرجہ ذیل تین صورتیں پیدا ہوتیں ہیں:

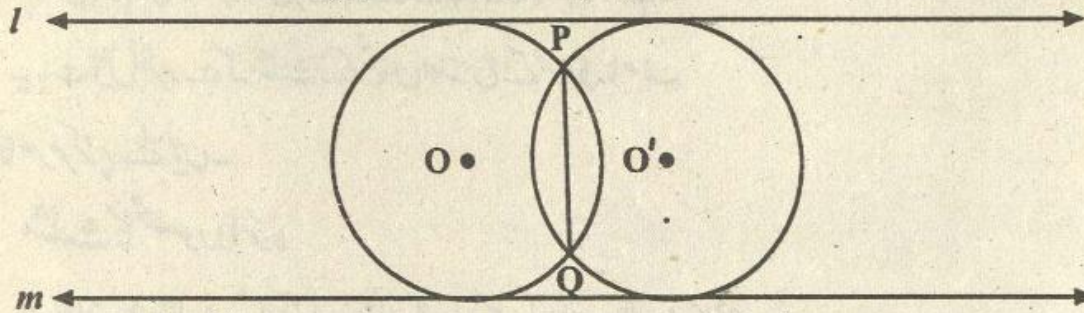
یا تو (i) خط دائرے کو دو مختلف نقاط پر قطع کرے گا جیسا کہ شکل (i) میں خط l دائرے کو نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔ اس صورت میں خط l دائرے کا قاطع (Secant) ہے۔ جیسا کہ ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔

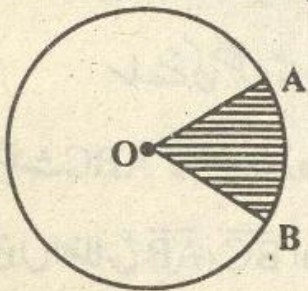
یا (ii) خط دائرے کو صرف ایک نقطے پر قطع کرتا ہے (یعنی صرف ایک نقطہ دائرے اور خط میں مشترک ہے) جیسا کہ شکل (ii) میں خط m دائرے کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔ ایسا خط دائرے کا مماس (Tangent) کہلاتا ہے اور مشترک نقطہ، نقطۂ مماس (Point of tangency) کہلاتا ہے۔ یہاں m مماس اور T نقطۂ مماس ہے۔

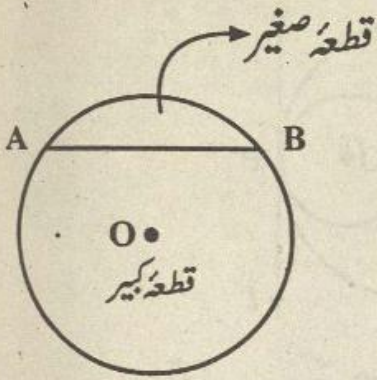
یا (iii) خط دائرے کو قطع نہیں کرتا ہے یعنی جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے کہ خط اور دائرے میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہے اور اُن کا تقاطع خالی سیٹ ہے۔

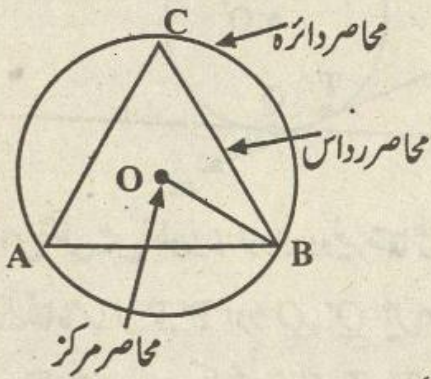
5.14 مشترک مماس، دو دائروں پر مشترک داخلی مماس اور مشترک خارجی مماس

اگر دو دائرے ایک دوسرے پر مماس ہوں یعنی وہ ایک مشترک نقطہ رکھتے ہوں۔ تو اس مشترک نقطے پر مماس دو دائروں کا مشترک مماس (Common Tangent) کہلاتا ہے۔ مندرجہ ذیل شکل میں خط l نقطۂ مماس P پر دو دائروں کا مشترک مماس ہے۔

اگر دو دائرے غیر متقاطع (Non-intersecting) ہوں تو یہ ناممکن ہے کہ وہ داخلی یا خارجی مشترک مماس رکھتے ہیں۔

اس شکل میں خطوط l اور l' دو غیر متقاطع دائروں پر دو خارجی مشترک مماس (External Common Tangents) ہیں جن کے نقاط مماس P, P' اور Q, Q' ہیں مزید برآں خطوط m اور m داخلی مشترک مماس (Internal Common Tangents) ہیں۔ جن کے نقاط مماس T, T' اور K, K' ہیں۔

اگر دو دائرے دو مختلف نقاط پر قطع کرتے ہیں تو صرف خارجی مشترک مماس کھینچے جا سکتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اس شکل میں l اور m خارجی مشترک مماس ہیں جو مراکز O اور O' والے دو دائروں پر کھینچے گئے ہیں۔ یہ دائرے نقاط P اور Q پر قطع کر رہے ہیں۔ PQ دو متقاطع دائروں (Intersecting Circles) کا مشترک وتر ہے۔

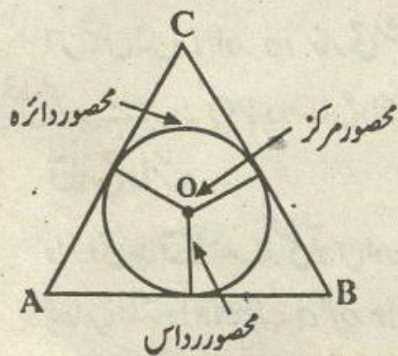
5.15 قطاع دائرہ

دائروی علاقہ کا حصہ جو کسی قوس اور دو رداسی قطعات سے گھرا ہوا ہو۔ قِطاعِ دائرہ (Sector of a circle) کہلاتا ہے۔
سامنے کی شکل میں OAB اس دائرے کا قِطاع ہے۔

5.16 دائرہ کا قطعہ

دائرے کا ایک وتر دائروی علاقے کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اِن حصوں میں سے ہر ایک دائرے کا قطعہ (Segment of circle) کہلاتا ہے۔ وہ علاقہ جو وتر اور قوس صغیرہ سے گھرا ہوا ہو، قطعۂ صغیرہ (Minor Segment) کہلاتا ہے۔ اور وہ علاقہ جو وتر اور قوس کبیرہ سے گھیرا ہوا ہو، قطعہ کبیر (Major Segment) کہلاتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا ہے۔

5.17 مثلث کا محاصر دائرہ

ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہو، مثلث کا محاصر دائرہ (Circum Circle of a triangle) کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں مرکز "O" والا دائرہ مثلث ABC کا محاصر دائرہ ہے کیونکہ یہ مثلث ABC کے راسوں A، B اور C سے گزر رہا ہے۔ دائرے کا مرکز "O" محاصر مرکز (Circum centre) اور اس کا رداس محاصر رداس (Circum radius) کہلاتا ہے۔

یہ بات پیشِ نظر رہے کہ مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف اس کے محاصر مرکز پر ملتے ہیں۔

5.18 مثلث کا محصور دائرہ

ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں اضلاع سے مس کرتا ہو، مثلث کا محصور دائرہ (Inscribed Circle of a triangle) کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں مرکز I والا دائرہ مثلث ABC کا محصور دائرہ ہے کیونکہ یہ مثلث ABC کے تینوں اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کو نقاط D، E اور F پر بالترتیب مس کرتا ہے۔

دائرے کا مرکز I محصور مرکز *(Inscribed centre or in center)*

اور اس کا رداس محصور رداس *(in-radius)* کہلاتا ہے

یہ بات پیش نظر ہے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف

محصور مرکز پر ملتے ہیں۔

5.19 مثلث کا جانبی دائرہ

ایسا دائرہ کو مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی طور پر

اور دیگر دو بڑھے ہوئے اضلاع کو اندرونی طور پر مَس کرتا ہے، مثلث

کا جانبی دائرہ *(Escribed circle of triangle)* کہلاتا ہے۔

سامنے کی شکل میں مرکز "I" والا دائرہ مثلث ABC

کے رداس A کے مقابل جانبی دوئرہ ہے کیونکہ راس A

کے مقابل ضلع BC کو بیرونی طور پر اور دو بڑھے ہوئے

اضلاع AX اور AY کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔

دائرے کا مرکز "I" جانبی *(e-centre)*

اور اس کا رداس جانبی رداس *(e-radius)*

کہلاتا ہے۔

اس طرح راس B اور C کے مقابل دیگر دو جانبی دائرے

حاصل کیے جاتے سکتے ہیں۔

مشق 5.1

1۔ مندرجہ ذیل کی شکل بنا کر وضاحت کیجیے۔

(i)	دائرہ	(ii)	نصف دائرہ
(iii)	قوس	(iv)	قوسین صغیرہ اور کبیرہ

(v) رداسی قطعہ (vi) وتر اور قطر

(vii) مماس (viii) دائرے کا انرونہ اور بیرونہ

(ix) قاطع (x) متماثل قوسیں

(xi) متماثل دائرے (xii) قِطاعِ دائرہ اور دائرے کا قطعہ

2۔ (الف) دائرے کے کسی ایک نقطے سے کتنے قطر، وتر اور رداسی قطعات کھینچے جا سکتے ہیں؟
(ب) دائرے کے مرکز سے کتنے قطر، وتر اور رداسی قطعات کھینچے جا سکتے ہیں؟

3۔ مندرجہ ذیل میں فرق بیان کیجیے۔

(i) رداس اور رداسی قطعہ (ii) دائرے کا اندرونہ اور بیرونہ

(iii) وتر اور قطر (iv) قوس کبیرہ اور قوس صغیرہ

4۔ 6 سینٹی میٹر کا قطعہ خط AB لیجیے۔ اس کا عمودی ناصف *(Right bisector)* نقطہ P پر کھینچیے۔ عمودی ناصف پر نقطہ O اس طرح لیجیے $m\overline{OP} = 4cm$ O کو مرکز اور $\overline{OA}$ کو رداسی قطعہ لیتے ہوئے دائرہ کھینچیے۔ کیا یہ دائرہ نقطہ B سے گزرتا ہے؟ اگر گزرتا ہے تو کیوں؟ $\overline{OA}$ کی پیمائش کیجیے اور حسابی طور پر اس کی پڑتال کیجیے۔

5۔ دائرے میں تین متماثل قوسیں ہیں۔ اگر ایک قوس کے مرکزی زاویے کی پیمائش 30° ہو تو دوسری قوسوں کے مرکزی زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

6۔ خالی جگہیں پُر کیجیے۔

(i) مقررہ نقطے سے مستوی کے تمام ہم فاصلہ نقاط کا سیٹ ---------- کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کے کسی نقطے کا اس کے مرکز سے فاصلہ اس کا ---------- کہلاتا ہے۔

(iii) دائرے کے کسی نقطے کو اس کے مرکز سے ملانے والا قطعۂ خط ---------- کہلاتا ہے۔

(iv) دو دائرے متماثل ہیں اگر اُن کے ---------- متماثل ہیں۔

(v) دائرے کے مرکز سے گزرنے والا وتر ---------- کہلاتا ہے۔

(vi) قطعۂ خط جس کے سرے دائرے پر واقع ہو ---------- کہلاتا ہے۔

7۔ صحیح یا غلط پر نشاندہی کیجیے۔

(i) قطر دائرے کے کم از کم تین نقاط پر مشتمل ہوتا ہے۔

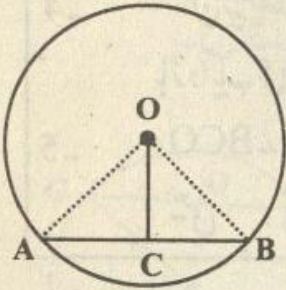
(ii) وتر ایسا خط ہے جو دائرے کے دو نقاط سے گزرتا ہے۔

(iii) ایسا خط جو دائرے کے دو نقاط رکھتا ہو، قاطع کہلاتا ہے۔

(iv) ایسا خط جو دائرے کو صرف اور صرف ایک نقطے پر قطع کرتا ہے، دائرے کا مماس کہلاتا ہے۔

5.20 دائرے سے متعلق اثباتی مسائل

مسئلہ 1

اگر دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو وہ وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اس میں $\overline{AB}$ وتر ہے۔
O کو $\overline{AB}$ سے نقطہ C پر ملاتے ہیں اور $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

مطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

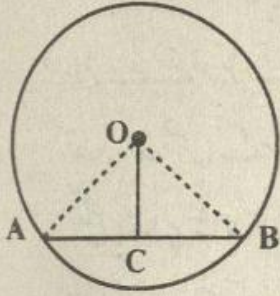
عمل: O کو A اور B سے ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں $\Delta AOC \longleftrightarrow \Delta BOC$	1۔
(i) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	(i) ایک ہی دائرے کا رداسی قطعات
(ii) $\overline{OC} \cong \overline{OC}$	(ii) مشترک
2۔ $\therefore \Delta AOC \cong \Delta BOC$	2۔ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض
3۔ $\therefore \overline{AC} \cong \overline{BC}$	3۔ مثلثوں کی تماثل کی رو سے

فہو المطلوب

مسئلہ 1 (الف)

(مسئلہ 1 پہلا عکس)

دائرے کے مرکز سے کھینچا جانے والا خط جو وتر کی تنصیف کرے وتر پر عمود ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا $\overline{AB}$ وتر ہے۔
اور C ، $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے یعنی $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

مطلوب: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

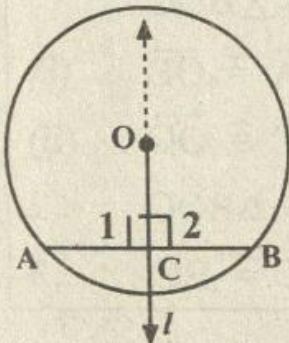
عمل: O کو A اور B سے ملائیے۔

ثبوت:

بیانات		دلائل	
1۔	$\Delta OCA \leftrightarrow \Delta OCB$ میں	1۔	
(i)	$\overline{AC} = \overline{BC}$	(i)	معلوم
(ii)	$\overline{OC} = \overline{OC}$	(ii)	مشترک
(iii)	$\overline{OA} = \overline{OB}$	(iii)	ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
2۔	$\therefore \Delta OCA \cong \Delta OCB$	2۔	قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض
3۔	$\therefore \angle AOC \cong \angle BOC$	3۔	مثلثوں کے تماثل کی رو
4۔	لیکن یہ متصلہ زاویے ہیں اور ان کے غیر مشترک بازو ایک ہی خط پر واقع ہیں۔	4۔	متصلہ زاویوں کی تعریف اور سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ
5۔	$\therefore m\angle ACO = 90 = m\angle BCO$ یعنی $\overline{OC} \perp \overline{AB}$	5۔	اگر دو سپلیمنٹری زاویے مساوی ہوں تو ہر ایک قائمۃ الزاویہ ہوتا ہے اور پس وہ عمود ہیں۔

فہوالمطلوب

مسئلہ 1 (ب)

(مسئلہ 1 کا دوسرا عکس)

دائرے کے وتر کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اس میں $\overline{AB}$ وتر ہے۔
خط l نقطہ C پر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے یعنی
$m\angle 1 = m\angle 2 = 90^\circ$ اور $\overline{AC} = \overline{BC}$ ۔

مطلوب: خط l، مرکز O سے گزرتا ہے یعنی O خط l پر واقع ہے۔

ثبوت:

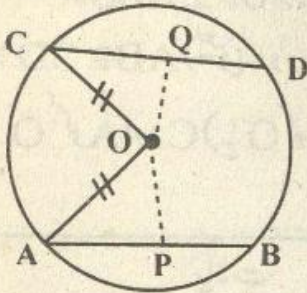
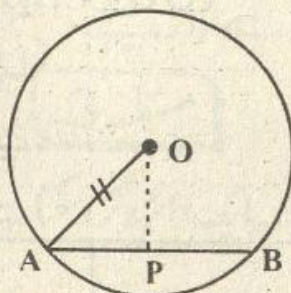
بیانات	دلائل
1۔ کیونکہ l، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔	1۔ معلوم
2۔ پس A اور B سے l کا ہر نقطہ ہم فاصلہ ہے۔	2۔ مسئلہ 16 (نویں جماعت کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)۔ کی رو سے
3۔ اس طرح A اور B سے ہم فاصلہ ہر نقطہ l پر واقع ہے۔	3۔ اوپر (2) میں ثابت کیا گیا۔
4۔ لیکن $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	4۔ ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
5۔ پس O خط l پر واقع جو $\overline{AB}$ کا عودی ناصف ہے۔	5۔ اوپر (2) اور (3) میں ثابت کیا گیا۔

فہوالمطلوب

مسئلہ 2

(الف) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے متماثل وتر اس کے مرکز (ان کے مراکز) سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

(ب) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے دو وتر جو مرکز (یا مراکز سے) ہم فاصلہ ہوں، متماثل ہوتے ہیں۔

[مسئلہ 2 کے جز والف کا عکس]

شکل (i)

شکل (ii)

(الف) **معلوم:** ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے (یا دو متماثل دائروں کے مراکز O اور O' ہیں) اس میں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو متماثل وتر ہیں۔

$\overline{OP} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OQ} \perp \overline{CD}$ (یا $\overline{O'Q} \perp \overline{CD}$)

مطلوب: $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ (یا $\overline{O'Q}$)

عمل: O کو A اور C (یا O' کو C) سے ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $m\overline{AP} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	1۔ $OP \perp AB$ (مسئلہ 1)
2۔ $m\overline{CQ} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	2۔ $OQ(O'Q) \perp CD$ (مسئلہ 1)
3۔ لیکن $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	3۔ معلوم
4۔ پس $m\overline{AP} = m\overline{CQ}$	4۔ مساواتوں کی خاصیتِ متعدیت
5۔ $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta COQ$ (یا $CO'Q$) میں	5۔
(i) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ $(\overline{CO'})$	(i) ایک ہی دائرے (یا تماثل دائروں) کے رداسی قطعات
(ii) $\overline{AP} \cong \overline{CQ}$	(ii) اوپر ثابت کیا گیا
(iii) $\angle APO \cong \angle CQO$ (یا $CO'Q$)	(iii) قائمہ زاویے
6۔ $\therefore \Delta AOP \cong COQ$ (یا $CO'Q$)	6۔ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض
7۔ $\therefore \overline{OP} \cong \overline{OQ}$ (یا $\overline{O'Q}$)	7۔ مثلثوں کے تماثل کی رو سے

فہوالمطلوب

(ب)

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے شکل (i) دیکھیے (یا دو متماثل دائروں کے مراکز O اور O' ہیں، شکل (ii) دیکھیے)

اس میں $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OQ} \perp \overline{CD}$ (یا $\overline{O'Q} \perp \overline{CD}$)

مطلوب: $AB \cong CD$ (یعنی دونوں وتر متماثل ہیں)

عمل: O کو A اور C (یا O' کو C) سے ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta COQ$ (یا $CO'Q$) میں	1۔
(i) $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ $(\overline{O'Q})$	(i) معلوم
(ii) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ $(\overline{CO'})$	(ii) ایک ہی دائرے (متماثل دائروں) کے رداسی قطعات
(iii) $\angle APO \cong \angle CQO$ $(\angle CQO')$	(iii) قائمہ زاویے
2۔ $\therefore \Delta AOP \cong \Delta COQ$ (یا $\Delta CO'Q$)	2۔ قائمہ زاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض

3۔ $\therefore\ m\overline{AP} = m\overline{CQ}$	3۔ مثلثوں کے تماثل کی رو سے
4۔ لیکن P اور Q ، $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کے واسطی نقاط ہیں۔	4۔ مسئلہ 1
5۔ $\therefore\ 2m\overline{AP} = 2m\overline{CQ}$	5۔ مساوات کی ضربی خاصیت
6۔ یا $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	6۔ $2m\overline{CQ} = 2m\overline{CD}$ ؛ $2m\overline{AP} = m\overline{AP}$

فہوالمطلوب

مشق 5.2

1۔ ایک دائرے کے دو وتروں کے عمودی ناصف دائرے کے مراکز پر قطع کرتے ہیں [اشارہ 1 (الف) استعمال کیجیے]

تعریف: دو یا دو سے زائد دائرے جن کے مرکز ایک ہی ہو، ہم مرکز دائرے (Cocentric circles) کہلاتا ہیں۔

2۔ دو ہم مراکز دائروں کو قطع کرنے والے خط کو ہم مرکز دائرے متماثل قطعات میں قطع کرتے ہیں۔

3۔ ثابت کیجیے کہ دائرے کی متماثل وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

4۔ سوال 3 کا عکس لکھیے اور اسے ثابت کیجیے۔

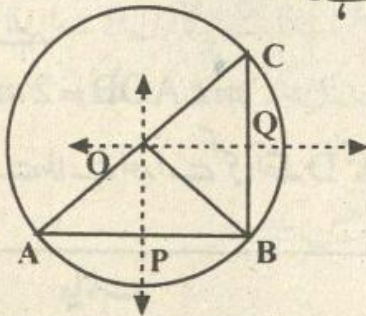
5۔ دو متماثل دائروں میں مراکز سے ہم فاصلہ وتر متماثل ہوتے ہیں۔

6۔ سوال 5 کا عکس بیان کیجیے اور اسے ثابت کیجیے۔

7۔ 5.7 سینٹی میٹر رداس کے ایک دائرے میں 8 سینٹی میٹر کی وتر کھینچی گئی اس کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

8۔ تین غیر ہم خط نقاط لیجیے۔ ان میں سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچے۔

مسئلہ 3

تین غیر ہم خط نقاط سے صرف اور صرف ایک دائرہ گزر سکتا ہے۔

معلوم: B، A اور C تین غیر ہم خط نقاط ہیں۔

مطلوب: B، A اور C سے صرف اور صرف ایک دائرہ گزر سکتا ہے۔

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{BA}$ کے ناصف $\overline{OP}$ اور $\overline{QO}$ بالترتیب P اور Q پر قطع کرتے ہوئے کھینچیے اور ایک دوسرے سے O پر ملتے ہوں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\overleftrightarrow{OP}$ نقاط A اور B سے ہم فاصلہ نقاط کا طریق *(Locus)* ہے یعنی $\overline{AO} \cong \overline{BO}$	1- مسئلہ 16 (ریاضی نہم) کی رو سے $(\overline{OP} \perp \overline{AB})$
2- اسی طرح $\overline{BO} \cong \overline{CO}$	2- مسئلہ 16 (ریاضی نہم) کی رو سے $(\overline{OQ} \perp \overline{BC})$
3- $\therefore\ \overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$	3- مساوات کی خاصیت متعدیت
4- پس دائرے جس کا مرکز O اور رداس $m\overline{OA}$ کے مساوی ہو، نقاط B اور C سے گزرے گا۔	4- $\therefore\ m\overline{OA} = m\overline{BO} = m\overline{CO}$
5- پس مذکورہ دائرہ ہی صرف وہ دائرہ ہے جو B , A اور C سے گزرتا ہے۔	5- پس $\overleftrightarrow{OP}$ اور $\overleftrightarrow{OQ}$ صرف ایک نقطے پر قطع کرتے ہیں۔

فہوالمطلوب

مسئلہ 4

کسی دائرے کی قوس صغیرہ کے مرکزی زاویے کی مقدار متناظرہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے کی مقدار سے دُگنی ہوتی ہے۔

Fig (i)

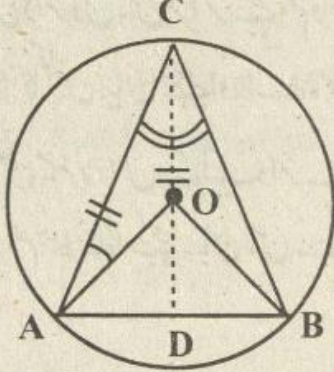
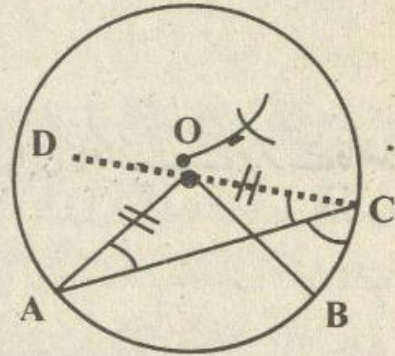



Fig (ii)

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ اس کی قوس $\widehat{AB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے اور قوس کبیرہ $\widehat{ACB}$ کا محصور زاویہ $\angle ACB$ ہے۔

مطلوب: $m\angle AOB = 2\, m\angle ACB$

عمل: C کو O سے ملایئے اور اسے کسی نقطہ D تک بڑھایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- ΔAOC میں $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	1- ایک ہی دائرے کا رداسی قطعات
2- $\therefore\ m\angle ACO = m\angle CAO$	2- متماثل اضلاع کے متقابلہ زاویے

بیانات	وجوہات
3- لیکن $m\angle AOD = m\angle ACO + m\angle CAO$ $= m\angle ACO + m\angle ACO$ $= 2m\angle ACO$	3- بیرنی زاویہ = اندرونی متقابلہ زاویوں کا مجموعہ $\therefore m\angle CAO = m\angle ACO$
4- اسی طرح $m\angle BOD = m\angle BCO + m\angle CBO$ $= m\angle BCO + m\angle BCO$ $= 2m\angle BCO$	4- (2) اور (3) کی وجوہات کی رو سے $m\angle CBO = m\angle BCO$
5- شکل (i) میں $m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle ACO + 2m\angle BCO$ یا $m\angle AOB = 2(m\angle ACO + m\angle ACO)$ یا $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	5- (3) اور (4) کو جمع کرنے سے زاویوں کی جمع کا موضوعہ کی رو سے
6- شکل (ii) میں $m\angle BOD - m\angle AOD = 2m\angle ACO - 2m\angle ACO$ یا $m\angle AOB = 2(m\angle BCO - m\angle ACO)$ $= 2m\angle ACB$	6- (4) کو (3) میں سے تفریق کرنے سے زاویوں کی جمع کا موضوعہ کی رو سے

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ کسی قوس کبیرہ کے مرکزی زاویے کی مقدار تناظرہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے کی مقدار سے دُگنی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح 2۔ نصف دائرے کے مرکزی زاویے کی مقدار نصف دائرے کے محصور زاویے کی مقدار سے دُگنی ہوتی ہے۔

مشق 5.3

1- تین گاؤں اس طرح واقع ہیں کہ گاؤں A کے مشرق میں 6 کلومیٹر کے فاصلے پر گاؤں B ہے اور گاؤں B کے شمال میں 8 کلومیٹر کے فاصلے پر گاؤں C ہے۔ تینوں گاؤں کے مکینوں نے ایسی جگہ مسجد تعمیر کرنے کی منصوبہ بندی کی کہ ہر گاؤں سے اس کا فاصلہ ایک ہی ہو۔

(الف) مسطر اور پرکار کی مدد سے صاف ستھری شکل بنا کر مسجد کے مقام کا تعین کیجیے۔

(ب) ہر گاؤں کے رہائشی کو کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا؟

(ج) اگر بعد میں دو گاؤں P اور Q ظہور پذیر ہوئے تو بالترتیب ایک A اور B کے وسط میں B اور C کے وسط میں ہے۔ P اور Q کے رہائشوں کو مسجد پہنچنے تک کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا؟

2۔ ثابت کیجیے کہ نصف دائرے کا محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

3۔ ثابت کیجیے کہ کسی قوس کبیرہ کے محصور زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

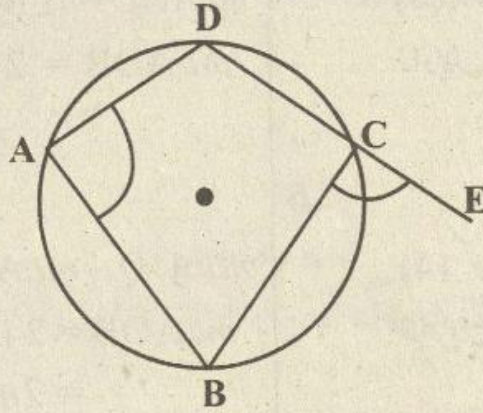
4۔ قوس کبیرہ کا محصور زاویہ حادہ ہوتا ہے۔

5۔ قوس صغیرہ کا محصور زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔

6۔ دو متماثل دائروں میں دو متماثل قوس کبیرہ کے محصور زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

تعریف: ایسی چوکور جس کے چاروں راس ایک دائرے پر واقع ہوں، مدوری چوکور (Cyclic quadrilateral) کہلاتا ہے۔

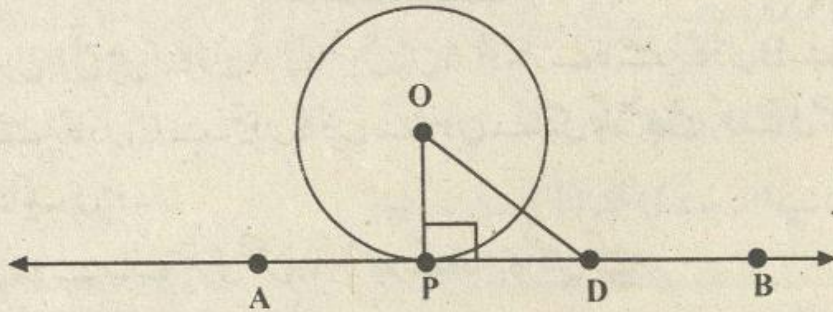
7۔ مدوری چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

8۔ اگر کسی مدوری چوکور کا ایک ضلع بڑھا دیا جائے تو اس طرح بننے والا بیرونی زاویہ چوکور کے متقابلہ اندرانی زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

مسئلہ 5

(الف) اگر ایک خط دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود ہو تو اس نقطے پر یہ دائرے کا مماس ہے۔

(ب) نقطۂ مماس پر دائرے کے مماس اور رداسی قطعہ ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

(ج) دائروں کے مماس کے نقطۂ مماس پر زاویہ قائمہ بناتے ہوئے کھینچا گیا خط دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

(الف)

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے $\overline{OP}$ اس کا رداسی قطعہ ہے۔

اس کے بیرونی سرے پر $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کا مماس ہے یعنی $\overleftrightarrow{AB}$ صرف نقطۂ P پر دائرے کو قطع کرتا ہے۔

عمل: $\overleftrightarrow{AB}$ پر نقطہ D لیجیے۔ O اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\triangle OPD$ میں $m\angle OPD = 90^\circ$	1۔ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$
2۔ $\therefore m\angle ODP < 90^\circ$	2۔ کسی مثلث میں صرف ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ باقی حادہ زاویے ہوتے ہیں۔
3۔ $\therefore m\overline{OD} > m\overline{OP}$	3۔ بڑے زاویے کا متقابلہ بڑا ضلع
4۔ پس D دائرے کے باہر واقع ہے۔	4۔ $\therefore m\overline{OD} > \overline{OP}$ (رداسی قطعۂ)
5۔ اسی طرح $\overleftrightarrow{AB}$ کا ہر نقطہ (سوائے P کے) دائرے کے باہر واقع ہے۔	5۔ مندرجہ بالا طریقے کی رو سے
6۔ $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کو صرف نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔ یعنی $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے پر مماس ہے۔	6۔ مماس کی تعریف کی رو سے

فہوالمطلوب

(ب)

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ $\overleftrightarrow{AB}$ اس کا نقطہ P پر مماس ہے۔ [(الف) میں شکل دیکھیے]

مطلوب: $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

عمل: $\overleftrightarrow{AB}$ پر نقطہ D لیجیے۔ O اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ چونکہ D دائرے سے باہر ہے۔	1۔ $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کو صرف نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔
2۔ $\therefore m\overline{OD} > m\overline{OP}$	2۔ دائرے کے بیرونے میں کسی نقطہ سے اس کے مرکز کا فاصلہ اس کے رداس سے بڑا ہوتا ہے۔

3۔ اسی طرح $\overleftrightarrow{AB}$ پر ہر نقطہ (سوائے P کے) دائرے کے بیرونے میں واقع ہوتا ہے۔	3۔ جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا ہے۔
4۔ لہٰذا $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$	4۔ چونکہ $\overline{OP}$ کی مقدار سب سے چھوٹی ہے (مسئلہ 4)

فہوالمطلوب

(ج)۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ $\overleftrightarrow{AB}$ اس کے نقطہ P (نقطہ مماس) پر مماس ہے۔
اور $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{AB}$

مطلوب: $\overleftrightarrow{PC}$ مرکز O سے گزرتا ہے۔

عمل: اگر $\overleftrightarrow{PC}$ مرکز O سے نہیں گزرتا ہے تو فرض کیجیے یہ کسی دوسرے نقطے سے گزرتا ہے۔ O اور P ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\angle OPD$ ایک زاویہ قائمہ ہے۔	1۔ $\overline{OP}$ رداسی قطعہ ہے اور $\overleftrightarrow{AB}$ مماس ہے [مسئلہ 5 (ب)]
2۔ $\angle CPB$ ایک زاویہ قائمہ ہے۔	2۔ معلوم
3۔ $\therefore m\angle OPB = m\angle CPB$	3۔ ہر ایک زاویہ قائمہ ہے۔
4۔ یہ جبھی ممکن ہے اگر $\overleftrightarrow{PC}$ اور $\overleftrightarrow{PO}$ منطبق ہوں۔ پس $\overleftrightarrow{PC}$ مرکز O سے گزرتا ہے۔	4۔ مفروضہ غلط ہوا، دیے گئے حقائق صحیح ہیں۔

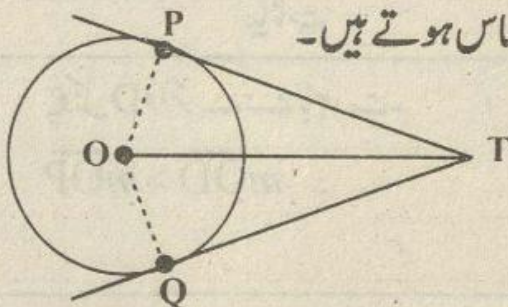
فہوالمطلوب

مسئلہ 6

کسی دائرے پر اس کے بیرونے میں ایک نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس ہوتے ہیں۔

معلوم: $\overline{TQ}$ اور $\overline{TP}$ مرکز O والے دائرے پر دو مماس ہے۔

مطلوب: $\overline{TQ} \cong \overline{TP}$

عمل: O کو Q، P اور T سے ملائیے۔

ثبوت:

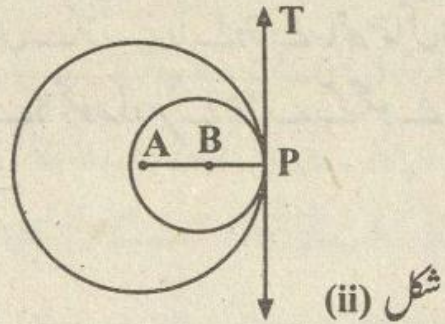
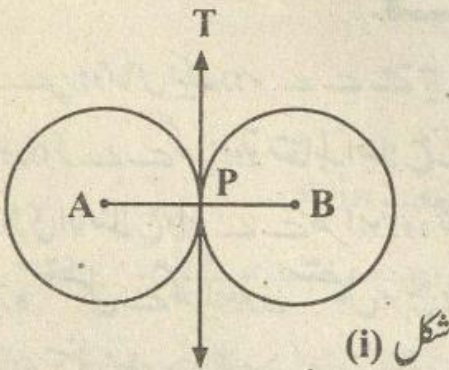
بیانات	دلائل
1۔ $\overline{TP}$ اور $\overline{TQ}$ مماس ہیں۔	1۔ معلوم
2۔ پس $\overline{OP} \perp \overline{TP}$ اور $\overline{OQ} \perp \overline{TQ}$	2۔ مماس رداسی قطعات پر عمود ہیں [مسئلہ 5 (ب)]
3۔ $\triangle OQT \longleftrightarrow \triangle OPT$ میں	3۔
(i) $\overline{OT} \cong \overline{OT}$	(i) مشترک
(ii) $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$	(ii) ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
4۔ $\therefore \triangle OPT \cong \triangle OQT$	4۔ قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض
5۔ $\therefore \overline{TP} \cong \overline{TQ}$	5۔ مثلثوں کے تماثل کی رو سے

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1۔ کسی دائرے پر بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس مرکز پر متماثل زاویوں کے مقابل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2۔ کسی دائرے پر بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس مرکز سے نقطے کو ملانے والے خط پر مساوی مائل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7

اگر دو دائرے بیرونی (یا اندرونی) طور پر مس کرتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ اُن کے رداسی کے مجموعے (یا فرق) کے مساوی ہوتا ہے۔

شکل (ii)

شکل (i)

معلوم: دو دائرے جن کا مراکز A اور B ہیں، نقطہ P پر (بیرونی یا اندرونی طور پر) مس کرتے ہیں۔

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{AP} + m\overline{PB}$ [شکل (i) میں]

$m\overline{AB} = m\overline{AP} - m\overline{PB}$ [شکل (ii) میں]

عمل: دو دائروں پر مشترک مماس $\overleftrightarrow{PT}$ کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ مراکز A اور B والے دائروں پر $\overline{PT}$ مماس ہیں۔	1۔ عمل
2۔ $\overline{BP} \perp \overleftrightarrow{PT}$ ، $\overline{PB} \perp \overleftrightarrow{PT}$ ∴	2۔ مسئلہ 5
3۔ پس نقاط P,A اور B ایک ہی خط پر واقع ہیں۔	3۔ سپلیمنٹ کا موضوعہ
4۔ شکل (i) میں A,P اور B کے درمیان میں ہے۔ $\therefore m\overline{AP} + m\overline{PB} = m\overline{AB}$	4۔ درمیان کی تعریف کی رو سے
5۔ شکل (ii) میں A,B اور P کے درمیان میں ہے۔ $\therefore\ m\overline{AB} + m\overline{PB} = m\overline{AP}$ یا $m\overline{AB} = m\overline{AP} - m\overline{PB}$	5۔ دلیل 4 کی رو سے
6۔ پس $m\overline{AB} = m\overline{AP} + m\overline{PB}$ اور $m\overline{AB} = m\overline{AP} - m\overline{PB}$	6۔ اوپر (4) اور (5) میں ثابت کیا گیا ہے۔

فہوالمطلوب

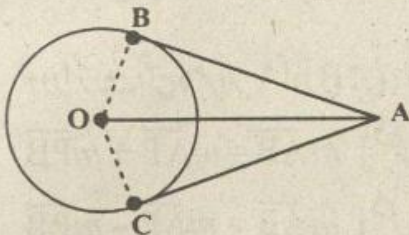
مشق 5.4

1۔ اگر ایک دائرے پر دو مماس ایک دوسرے سے ملتے ہیں تو وہ نقاط مماس سے گزرنے والے وتر کے ساتھ متماثل زاویے بناتے ہیں۔

2۔ اگر ایک چوکور دائرے سے گھرا ہو تو متقابلہ اضلاع کے ایک جوڑے کا مجموعہ دوسرے جوڑے کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

3۔ اگر ایک متوازی الاضلاع دائرے سے گھرا ہو تو وہ معین ہوتا ہے۔

4۔ اگر ایک دائرہ مستطیل سے گھرا ہو تو وہ مستطیل مربع ہوتا ہے۔

5۔ اس شکل میں 6 سینٹی میٹر رداس کا پہیہ ہے۔
پہیہ کے مرکز سے 10 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ایک چھوٹی سی پلی (*Pully*) ہے۔ ایک پٹی پہیے اور پلی کے گرد حرکت کر رہی ہے۔ پٹی کی لمبائی معلوم کیجیے۔
جو پہیے کو چھو نہیں رہی ہے۔

6۔ اگر دو دائرے اندرونی طور پر مماس ہوں تو مراکز کا خطِ مشترک نقطۂ مماس سے گزرتا ہے۔

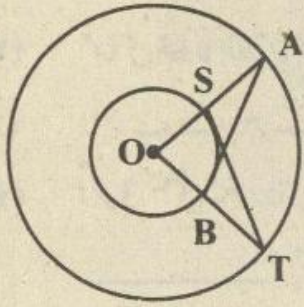
7۔ اگر دو دائروں کے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے کے برابر ہو تو دائرے بیرونی طور پر مماس ہوتے ہیں۔

8۔ ثابت کیجیے کہ دو دائروں کے مشترک بیرونی مماس قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

[اشارہ: مشترک بیرونی مماسی قطعات کو اس قدر بڑھایئے کہ کسی نقطۂ G پر مل جائیں یا دوسری طرف ثابت کیجیے]

9۔ ثابت کیجیے کہ دو دائروں کے مشترک اندرونی مماسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

10۔ ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ اس کے بیرونے میں نقطہ A واقع ہے۔ $\overline{OA}$ دائرے کو نقطہ S پر قطع کرتا ہے۔ نقطہ S پر $\overline{ST}$ اس دائرے پر مماس ہے۔ O کو مرکز مان کر $\overline{OA}$ رداسی قطعہ کے ساتھ ایک اور دائرہ کھینچا۔ جس سے $\overline{ST}$ نقطہ T پر ملتا ہے۔ $\overline{OT}$ نقطۂ B پر پہلے دائرے کو قطع کرتے ہوئے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\overline{BA}$ نقطۂ B پر مماس ہے۔ [اشارہ: ثابت کیجیے کہ: $\Delta OBA \cong \Delta OST$]

11۔ دو دائرے بیرونی طور پر مماس ہیں۔ ثابت کیجیے کہ اندرونی مشترک مماس دونوں بیرونی مماسی قطعات کی تنصیف کرتا ہے۔ نیز ثابت کیجیے کہ مشترک اندرونی مماس کا قطعہ جو دونوں بیرونی مماس کے درمیان واقع ہے، بیرونی مماسی قطعات میں ہر ایک کے متماثل ہے۔

متفرق مشق IV

1۔ خالی جگہیں پُر کیجیے۔

(i) دائرے کا قطر جو وتر پر عمود ہو ہمیشہ وتر کی ______ کرتا ہے۔

(ii) اگر قطر وتر کی تنصیف کرتا ہے تو یہ وتر پر ______ ہوتا ہے

(iii) ایک ہی دائرے کی دو متماثل وتر دائرے کے مرکز سے ______ ہوتی ہیں۔

(iv) اگر ایک دائرے کی دو وتر دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو وہ ______ ہوتے ہیں۔

(v) ایک خط جو دائرے کے مرکز سے دائرے کے رداس کے مساوی فاصلے پر ہے، دائرے پر ______ ہوتا ہے۔

(vi) تین غیر ہم خط نقاط سے ______ دائرہ گزر سکتا ہے۔

(vii) دائرے کا مرکز دائرے پر تین غیر ہم غیر ہم خط نقاط کو ملانے والے قطعات ______ پر واقع ہوتا ہے۔

(viii) اگر ایک دائرہ تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتا ہے تو دائرے پر واقع کسی نقطۂ کا فاصلہ اس کے ______ سے یکساں ہوتا ہے۔

(ix) قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ اس کی متناظرہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے ______ ہوتا ہے۔

(x) قوس کبیرہ کے تمام محصور زاویے ______ ہوتے ہیں۔

(xi) کوئی خط جو رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود ہو، دائرے پر ______ ہوتا ہے۔

(xii) اگر کوئی خط دائرے پر مماس ہو تو یہ نقطۂ مماس پر رداسی قطعہ پر ______ ہوگا۔

(xiii) دائرے کے مرکز سے مماسی خط کا کم از کم فاصلہ اس کے ______ کے برابر ہوتا ہے۔

(xiv) مماسی خط کا نقطہ مماس پر عمود دائرے کے ______ سے گزرے گا۔

(xv) دائرے کے باہر کے کسی نقطہ سے کھینچے گئے مماس لمبائی میں ______ ہوتے ہیں۔

(xvi) اگر 3 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کے مرکز سے 5 سینٹی میٹر دور ایک نقطے سے مماس کھینچا گیا ہے، تو مماسی قطعہ کی لمبائی ______ سینٹی میٹر ہے۔

(xvii) اگر 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر والے دو دائرے بیرونی طور مس کرتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ______ سینٹی میٹر ہے۔

(xviii) اگر 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر والے دو دائرے اندرونی طور پر مس کرتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ______ سینٹی میٹر ہے۔

(xix) اگر دو دائرے بیرونی طور پر ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں تو اس کا نقطہ مماس ہمیشہ ______ پر واقع ہوتا ہے۔

(xx) مستوی کے ایسے نقاط کا سیٹ جو مقررہ نقطے سے ہم فاصلہ ہوں، ______ کہلاتا ہے۔

(xxi) قطر وہ وتر ہے جو دائرے کے ______ سے گزرتا ہے۔

(xxii) مرکزی زاویہ وہ زاویہ ہے جو دائرے کے ______ پر کسی قوس کے مقابل ہو۔

(xxiii) دو دائرے جن کے رداس مساوی ہوں، ______ ہوتے ہیں۔

(xxiv) نصف دائرے کے محصور زاویے کی مقدار ______ کے برابر ہوتی ہے۔

2۔ درست یا غلط بیان کی نشاندہی کیجیے۔

(i) دائرے کا ہر قطر دائرے کا وتر بھی ہوتا ہے۔

(ii) دائرے کے دو رداس ہوتے ہیں۔

(iii) دائرے کا وتر دائرے پر مماسی خط کا قطعہ بھی ہوتا ہے۔

(iv) اگر قطر وتر پر عمود ہو تو یہ وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

(v) محصور زاویہ وہ زاویہ ہے جس کا راس دائرے کے مرکز پر واقع ہوتا ہے۔

اثباتی علم ہندسہ

6.1 تعارف

ہم نویں جماعت میں علم ہندسہ کے مندرجہ ذیل بنیادی تصورات کے متعلق پڑھ چکے ہیں۔

(i) غیر تعریف شدہ اصطلاحات یعنی نقطہ، خط، مستوی اور مکاں

(ii) تعریف شدہ اصطلاحات مثلاً قطعہ، خط، شعاع، زاویے، مثلثیں وغیرہ

(iii) بنیادی مفروضے یعنی اصول متعارضہ اور اصول مضوعہ

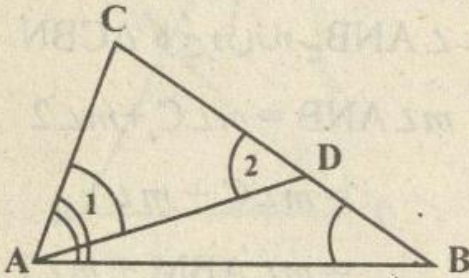
(iv) مسائل ہندسی کے ثبوت کے لئے استخراجی طریقہ استدلال متعلقہ اقدامات کے ساتھ

(v) خطوط، متوازی خطوط، مثلثوں، متوازی الاضلاع اور چوکور سے متعلق کچھ مسائل ہندسی

مثلثوں سے متعلق اب ہم چند مزید مسائل ہندسی (*Theorems*) سیکھیں گے۔

6.2 نابرابری (*Inequalities*)

مسئلہ 1

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع لمبائی میں نابرابر ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار زیادہ ہوتی ہے۔

معلوم: ΔABC میں $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

مطلوب: $m\angle A > m\angle B$

عمل: $\overline{BC}$ سے $\overline{CD}$ متماثل $\overline{AC}$ کے قطع کیا۔ D کو A سے ملایا۔

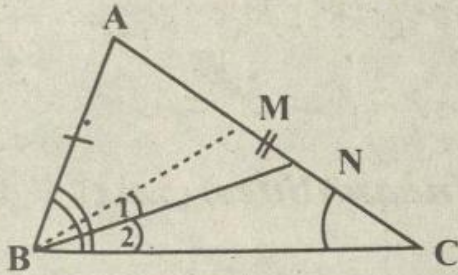
ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔACD میں $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	1۔ عمل
2۔ $m\angle CAD = m\angle CDA$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابلہ زاویے (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 6)

بیانات	دلائل
3۔ لیکن $\angle CDA$ مثلث ABD کا بیرونی زاویہ ہے۔	3۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
4۔ $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	4۔ بیرونی زاویہ زندرونی غیر متصلہ زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔ (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 2)
5۔ لیکن $m\angle A > m\angle CAD$	5۔ $m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
6۔ $\therefore m\angle A > m\angle CDA$	6۔ $m\angle CDA = m\angle CAD$
7۔ $\therefore m\angle A > m\angle B$	7۔ اوپر (4) اور (6) میں نابرابری کی خاصیت متعدیت

فہوالمطلوب

مسئلہ 1 (الف)

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں نابرابر ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC

$m\angle B > m\angle C$

مطلوب: $m\overline{AC} > m\,\overline{AB}$

عمل: $\angle ABM$ بنائیے جو $\angle C$ کے متماثل ہو۔

$\angle MBC$ کا ناصف $\overline{BN}$ کھینچیے یعنی $m\angle 1 = m\angle 2$

بیانات	دلائل
1۔ ΔCBN کا بیرونی زاویہ $\angle ANB$ ہے۔	1۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
2۔ $m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	2۔ نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 5 نتیجہ صریح 5
$= m\angle C + m\angle 1$	$\because m\angle 2 = m\angle 1$ (عمل)
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\because m\angle C = m\angle ABM$ (عمل)
$= m\angle ABN$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
3۔ $\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	3۔ $\because m\angle ANB = \angle ABN$ (اوپر ثابت کیا گیا)
4۔ $\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	4۔ $\because m\,\overline{AC} > m\,\overline{AN}$

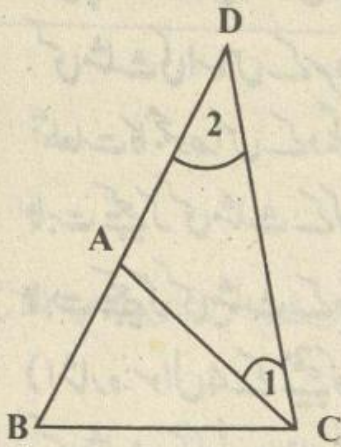
فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔
نتیجہ صریح 2۔ منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے کا ضلع باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

مشق 6.1

1۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے ضلع کا متقابلہ زاویہ سب سے بڑا ہوتا ہے۔
2۔ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع غیر مساوی ہوں تو چھوٹے ضلع کا متقابلہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔
3۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع سب سے بڑا ہوتا ہے۔
4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔
5۔ مسئلہ 1 (الف) کا متبادل ثبوت دیجیے یہ فرض کرتے ہوئے کہ اگر $m\overline{AC} \ngtr m\overline{AB}$ کو خاصیت ثلاثی کے ذریعے
(i) $m\,\overline{AC} = m\,\overline{AB}$ یا (ii) $m\,\overline{AC} < m\,\overline{AB}$ اور
مفروضے کو غلط ثابت کیجیے۔

مسئلہ 2

مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC

مطلوب: (i) $m\,\overline{AB} + m\,\overline{AC} > m\,\overline{BC}$

(ii) $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$

(iii) $m\overline{AC} + m\overline{BC} > m\overline{AB}$

عمل: $\overrightarrow{BA}$ کو نقطہ D تک اس طرح بڑھایا کہ $\overline{AD} \cong \overline{AC}$
D اور C کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔADC میں $\overline{AD} \cong \overline{AC}$	1۔ عمل
2۔ $\therefore m\angle 1 = m\angle 2$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابل زاویے
3۔ لیکن $m\angle 1$ $m\angle BCD$	3۔ $m\angle BCD = m\angle BCA + m\angle 1$

4۔ $\therefore m\angle BCD > m\angle 2$	4۔ نابرابری کی خاصیت متعدیت
5۔ $\triangle ABC$ میں $m\overline{BD} > m\overline{BC}$	5۔ بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع بڑا ہوتا ہے (مسئلہ 1 الف)
6۔ لیکن $m\overline{BD} = m\overline{AB} + m\overline{AD}$ $= m\overline{AB} + m\overline{AC}$	6۔ عمل
7۔ $\therefore m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$	7۔ (5) میں $\overline{BD}$ کی قیمت رکھنے سے
8۔ اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں۔ کہ $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$ اور $m\overline{BC} + m\overline{AC} > m\overline{AB}$	8۔ مندرجہ بالا طریقہ کار سے

فہو المطلوب

مشق 6.2

1۔ کسی چوکور کے اضلاع کا مجموعہ اس کے وتروں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

2۔ کسی چوکور کے تین اضلاع ایک ساتھ چوتھے سے بڑے ہوتے ہیں۔

3۔ کسی مثلث کی اساس کے سروں سے اس کے اندرونے میں کسی نقطے تک کھینچے گئے۔
قطعات کا مجموعہ اس کے دیگر دو اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔

4۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع ایک ساتھ تیسرے ضلع پر وسطانیہ کا دگنا ہوتے ہیں۔

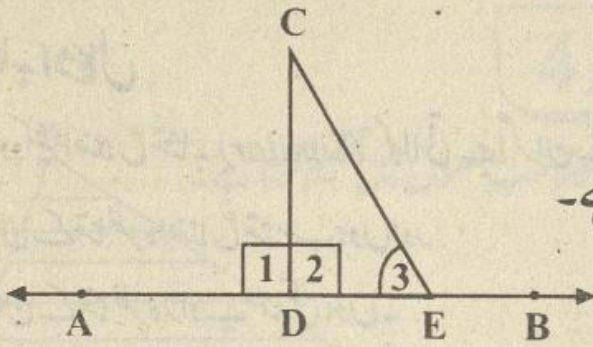
5۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے وسطانیوں کا مجموعہ اس کے اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔
(اشارہ: سوال 4 کے نتیجے کو استعمال کیجے)

6۔ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کا فرق تیسرے ضلع سے کم ہوتا ہے۔

مسئلہ 3

کسی نقطے سے جو کسی خط کے باہر واقع ہو، خط تک عمود سب سے کم فاصلہ ہوتا ہے۔

یا

کسی نقطے سے جو خط پر نہ ہو، خط تک کھینچے گئے تمام قطعات میں سے عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔

معلوم: نقطہ C سے $\overline{CD}$ خط AB پر عمود کھینچا گیا ہے۔ جو نقطہ D پر ملتا ہے۔
اور $\overline{CE}$ ایک دوسرا قطعہ ہے جو $\overleftrightarrow{AB}$ کو نقطہ E پر ملتا ہے۔

مطلوب: $m\overline{CD} \angle m\overline{CE}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\angle 1$ مثلث CDE کا بیرونی زاویہ ہے	1۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
2۔ $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	2۔ بیرونی زاویہ متقابلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوتا ہے
3۔ $\therefore m\angle 2 > m\angle 3$	3۔ $m\angle 1 = m\angle 2$ (قائمہ زاویے)
4۔ $\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$ یعنی $m\,\overline{CD} \angle m\,\overline{CE}$	4۔ بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع (مسئلہ 1 (الف)
5۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $m\,\overline{CD}$ کسی دوسرے قطعہ جو C سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک کھینچا گیا ہو، کم ہے	5۔ مندرجہ بالا طریقہ کار سے

فہوالمطلوب

مشق 6.3

1۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع ایک ساتھ عمود کے دگنے سے زیادہ ہوتے ہیں جسے راس جہاں دونوں اضلاع ملتے ہیں، سے متقابلہ ضلع پر کھینچا گیا ہے۔

2۔ کسی مثلث کا احاطہ اس کے تینوں عمودوں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

3۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے متماثل اضلاع ایک ساتھ اساس پر وسطانیہ کے دگنے سے بڑے ہوتے ہیں۔

4۔ کسی خط پر اس سے باہر دیئے گئے نقطے سے زیادہ سے زیادہ دو متماثل قطعات کھینچے جاسکتے ہیں۔

5۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے راس سے اساس کے کسی نقطے تک کھینچا گیا قطعہ خط متماثل اضلاع میں سے ہر ایک سے کم ہوتا ہے۔

6۔ کسی مثلث کا کوئی سا ضلع اس کے تین اضلاع کے مجموعے کے نصف سے کم ہوتا ہے۔

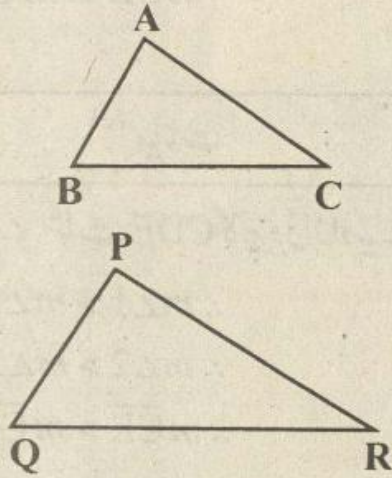
6.3 متشابہ اشکال

دو کثیر اضلاع متشابہ (*Similar*) کہلاتی ہے اگر ان کے درمیان ایک ایک مطابقت میں:

(i) ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں اور

(ii) ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوں۔

A B C

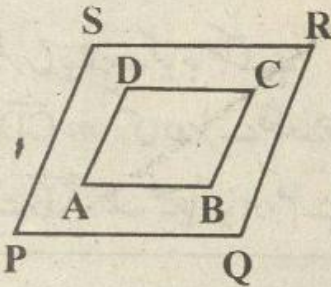
P Q R

مثال 1: $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta PQR$ میں

$$\angle C \cong \angle R\ ,\ \angle B \cong \angle Q\ ,\ \angle A \cong \angle P$$

اور
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}}$$

پس $\Delta PQR, \Delta ABC$ کے متشابہ ہے۔ علامتی طور پر اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

S R D C A B P Q

مثال 2: $||^m ABCD \longleftrightarrow ||^m PQRS$ میں

$< D = < S$ اور $< C = < R\ ,\ < B = < Q\ ,\ < A = < P$

اور
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{DC}}{m\,\overline{SR}} = \frac{m\overline{AD}}{m\,\overline{SP}}$$

پس $||^m ABCD \sim ||^m PQRS$ میں

مزید یہ کہ جب کبھی مقداریں تناسب میں ہوں تو ہم ہمیشہ ایک مقدار کو دوسری کے اضعاف (*Multiple*) میں ظاہر کر سکتے ہیں.

مثلاً اگر
$$\frac{m\ \overline{AB}}{m\ \overline{PQ}} = \frac{m\ \overline{CD}}{m\ \overline{RS}} = K$$

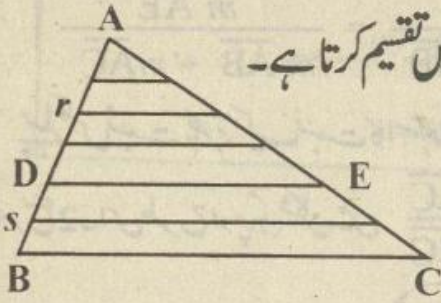
تو $m\overline{AB} = K\ (m\overline{PQ})$ اور $m\ \overline{CD} = K\ (m\overline{RS})$

جبکہ K مثبت حقیقی عدد ہے۔

نوٹ:

1- مثلثوں کے تشابہ کے لئے دو شرائط میں سے صرف ایک کا پورا ہونا کافی ہے۔

2- چار یا زائد اضلاع والے کثیر الاضلاع کے تشابہ کے لئے دونوں شرائط کو پورا ہونا ضروری ہے۔

مسئلہ 4

کسی مثلث کے ایک ضلع کے متوازی خط باقی دو اضلاع کو تناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

معلوم: ΔABC میں $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مطلوب: $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$

عمل: فرض کیجیے کہ لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ $m\overline{AD} = r$ اور $m\overline{BD} = s$ جبکہ r اور s غیر صفر مکمل اعداد ہیں۔
$\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات میں اور $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں اس طرح تقسیم کیا کہ $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{r}{s}$ نقاط تقسیم سے $\overline{BC}$ کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ متوازی خطوط $\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	1 عمل
2۔ پس یہی متوازی خطوط دوسرے خط قاطع $\overline{AE}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	2۔ مسئلہ 15 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3۔ اسی طرح $\overline{EC}$ کو s متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے	3۔ $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں متوازی خطوط نے تقسیم کیا ہے۔
4۔ پس $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{ra}{sa}$ یہاں متماثل قطعات میں سے ہر ایک کی مقدار ہے۔ یا $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{r}{s}$	4۔ اوپر (2) اور (3) سے
5۔ لیکن $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{r}{s}$	5۔ عمل
6۔ $\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$ یا $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$	6۔ برابری کی خاصیت متعدیت (ہر ایک $\frac{r}{s}$ کے مساوی ہے)

فہو المطلوب

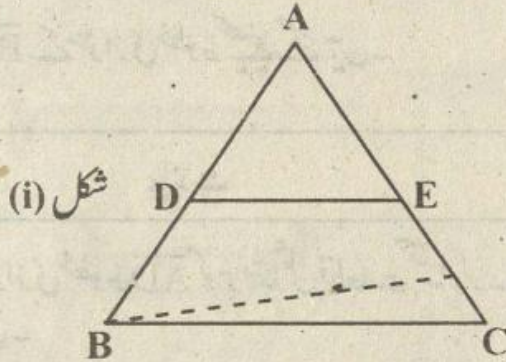
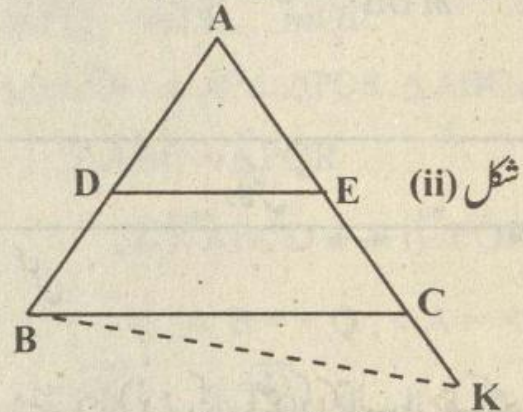
نتیجہ صریح 1۔ مسئلہ 4 کی شکل میں $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$

$$\left[\because \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} \Rightarrow \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AD} + m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AB} + m\overline{AC}}\right]$$

پہلے عکس نسبت پھر ترکیب نسبت کا استعمال کیا۔

نتیجہ صریح 2۔اس طرح اوپر کی شکل میں $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ ترکیب نسبت کے ذریعے

مسئلہ 4 (الف) (مسئلہ 4 کا عکس)

اگر کوئی خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو متناسب قطعات میں تقسیم کرتا ہے تو وہ مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC میں $\overline{DE}$ ، $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقاط D اور E پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$

مطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

عمل: اگر $\overline{DE}$، $\overline{BC}$ کے متوازی نہیں ہے تو $\overrightarrow{BK}$ کھینچیے جو $\overrightarrow{AC}$ کو بڑھانے سے نقطہ K پر ملتا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔABK میں $\overline{DE} \parallel \overline{BK}$	1۔ عمل
2۔ $\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}}$	2۔ مسئلہ 4
3۔ لیکن $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	3۔ معلوم
4۔ $\therefore \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	4۔ ہر ایک $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ کے مساوی ہے۔ (برابری کی خاصیت متعدیت)

5۔ یہ دلالت کرتا ہے کہ $\overline{EK} \cong \overline{EC}$ یا $m\overline{EK} = m\overline{EC}$	5۔ اگر مقدم برابر ہوں تو موخر بھی برابر ہوتے ہیں۔
6۔ یہ اسی وقت ممکن ہے جب C, K کے ساتھ منطبق ہوتا ہو۔	6۔ E دونوں میں مشترک نقطہ ہے۔
7۔ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	7۔ ہمارا مفروضہ غلط ہے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ مندرجہ بالا شکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

اگر $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ تو $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$

نتیجہ صریح 2۔

اگر $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ تو $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$

مشق 6.4

1۔ تین متوازی خطوط l ، m ، n دیگر خطوط x اور y کو بالترتیب نقاط A , B , C اور P, Q, R پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}}$$

2۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے اساس کے متوازی کھینچا گیا خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

3۔ ذوزنقہ ABCD *(Trapezium)* کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ O پر قطعہ کرتے ہیں۔

ثابت کیجیے کہ $m\overline{OA} : m\overline{OC} = m\overline{OB} : m\overline{OD}$

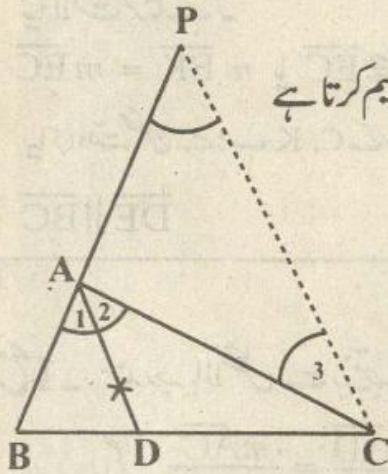
4۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے اضلاع کے متوازی کھینچا گیا خط غیر متوازی اضلاع کو متناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

5۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کو ایک ہی تناسب سے تقسیم کرنے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

7۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کی مقدار 8 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہے۔ متوازی خطوط متوازی خط ذوزنقہ کے ارتفاع کو نسبت 1:3 میں تقسیم کرتا ہے۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط پر اس خط سے بننے والے قطعات کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متواتر اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

مسئلہ 5

مثلث کی کسی زاویے کا ناصف متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

معلوم: مثلث ABC کے زاویے BAC کا ناصف $\overline{AD}$ ہے۔

مطلوب: $\dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$

عمل: $\overline{AD}$ کے متوازی $\overrightarrow{CP}$ کھینچیے جو $\overline{BA}$ کو بڑھانے سے نقطہ P پر ملے۔

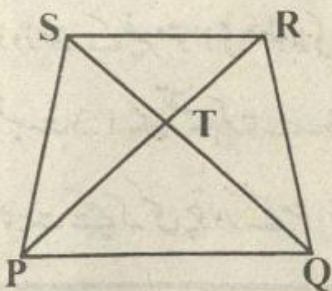
ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	1۔ عمل
2۔ $\therefore \angle 1 \cong \angle P$	2۔ متناظرہ زاویے
3۔ اسی طرح $\angle 2 \cong \angle 3$	3۔ متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے
4۔ لیکن $\angle 1 \cong \angle 2$	4۔ معلوم
5۔ $\therefore \angle P \cong \angle 3$	5۔ خاصیت متعدیت
6۔ $\therefore \overline{AP} \cong \overline{AC}$	6۔ متماثل زاویوں کے متقابلہ اضلاع
7۔ مزید APC میں $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	7۔ عمل
8۔ $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}}$	8۔ مسئلہ 4
9۔ $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$	9۔ کیونکہ $\overline{AC} \cong \overline{AP}$ (اوپر ثابت کیا)

فہوالمطلوب

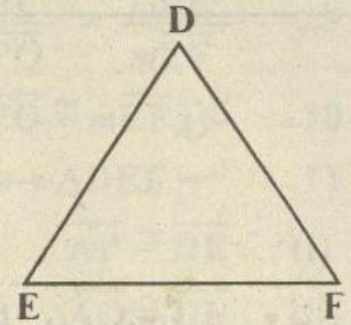
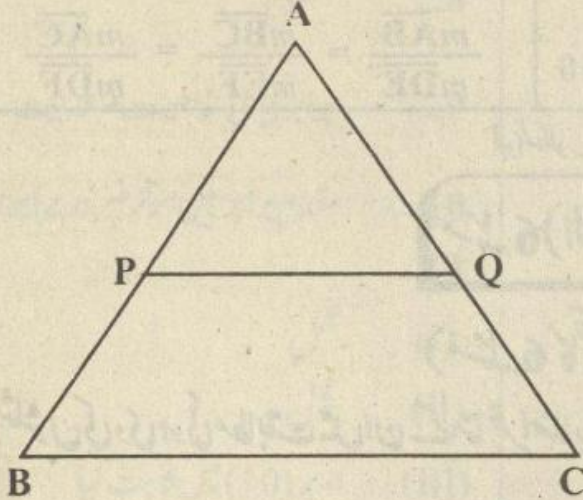
مشق 6.5

1۔ اگر کسی مثلث کے راسی زاویے کا ناصف اساس کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہوتا ہے۔

2۔ PQRS ایک چوکور ہے اور زاویوں Q اور S کا ناصف وتر $\overline{PR}$ کو نقطہ T پر ملتا ہے۔

ثابت کیجیے۔ $\dfrac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}} = \dfrac{m\overline{PS}}{m\overline{RS}}$

3۔ متماثل الساقین مثلث ABC کی اساس کے زاویے B کی تنصیف کرتے ہوئے قطعہ خط مخالف ضلع AC کے نقطہ D پر ملتا ہے اور D سے $\overline{BC}$ کے متوازی $\overline{DE}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کو E پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\overline{CE}$ زاویہ ACB کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 6

اگر دو مثلثیں متماثل الزاویہ (Equiangular) ہوں تو ان کے متناظر اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

معلوم: $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ میں

$\angle C \cong \angle F$ اور $\angle B \cong \angle E$, $\angle A \cong \angle D$

مطلوب: $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ ، P اور Q کو ملائیے۔

ثبوت:

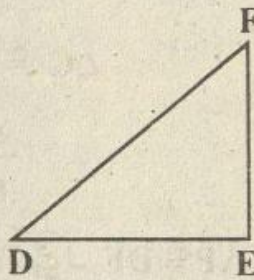
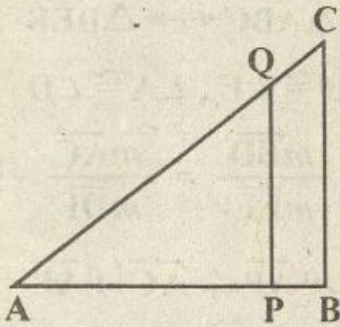
بیانات	دلائل
1. $\triangle APQ \longleftrightarrow DEF$ میں	1.
(i) $\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i) عمل
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(iii) عمل
2. $\therefore \triangle APQ \cong \angle DEF$	2. ض۔ز۔ض ≅ ض۔ز۔ض
3. $\therefore \angle APO \cong \angle E$	3. مثلثوں کے تماثل کی رو سے
4. لیکن $\therefore \angle B \cong \angle E$	4. معلوم
5. $\therefore \angle APQ \cong \angle B$	5. ہر ایک $\angle E$ کے متماثل ہے

بیانات	دلائل
6- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	6- متناظرہ زاویے متماثل ہیں۔
7- $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	7- مسئلہ 4 نتیجہ صریح 1
8- یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	8- چونکہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$
9- اس طرح $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	9- مندرجہ بالا طریقہ کار سے
10- پس $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	10- (8) اور (9) کو اکھٹا کرتے ہوئے

فہوالمطلوب

مسئلہ 6 (الف)

(مسئلہ 6 کا عکس)

اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ان کے متناظر اضلاع متناسب ہیں تو ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

معلوم: $\triangle ABC \leftrightarrow DEF$ میں

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$$

مطلوب: $\angle C \cong \angle F\ ,\ \angle B \cong \angle E\ ,\ \angle A \cong \angle D$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$، P اور Q کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\because \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	1- معلوم
2- $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	2- چونکہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ (عمل)
3- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	3- مسئلہ 4 (الف) کی رو سے
4- $\therefore \angle APQ \cong \angle B,\ \angle AQP \cong \angle C$	4- متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے

بیانات	وجوہات
-5 اور $\angle A \cong \angle A$	-5 ذاتی تماثل
-6 چونکہ ΔAPQ اور ΔABC مساوی الزاویہ ہیں	-6 متناظرہ زاویے متماثل ہیں
-7 $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$ یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$	-7 مسئلہ 6 کی رو سے $\overline{DE} \cong \overline{AP}$
-8 $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	-8 معلوم
-9 $\therefore \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	-9 برابری کی خاصیت متعدیت
-10 یعنی $m\overline{PQ} \cong m\overline{EF}$	-10 مقدم برابر ہیں موخر ضرور برابر ہوتے ہیں
-11 اب $\Delta APQ \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	-11
(i) $\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i) عمل
(ii) $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(ii) عمل
(iii) $\overline{PQ} \cong \overline{EF}$	(iii) اوپر (10) میں ثابت کیا
-12 $\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF$	-12 ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
-13 $\angle A \cong \angle D\ ,\ \angle P \cong \angle E, \angle Q \cong \angle F$	-13 مثلثوں کے تماثل کی رو سے
-14 پس $\angle A \cong \angle D\ ,\ \angle P \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$	-14 $\angle AQP \cong \angle C\ ,\ \angle APQ \cong \angle B$ اوپر (4) میں ثابت کیا۔

فہوالمطلوب

مشق 6.6

1۔ اگر دو مثلثوں میں ایک کے تین اضلاع دوسری کے متناظرہ تین اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ ان کے اضلاع متناسب ہیں۔

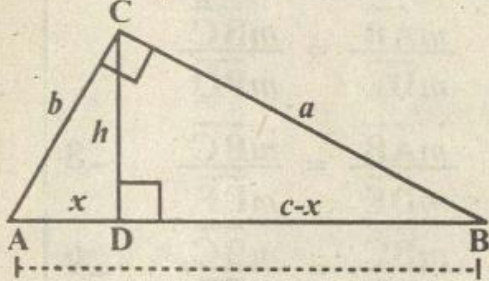
2۔ دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں ان کے اضلاع متناسب ہوں گے اگر ایک کا حادہ زاویہ دوسری کے حادہ زاویے کے متماثل ہو۔

3۔ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات ایک مثلث تشکیل دیتے ہیں جو کہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتی ہے۔

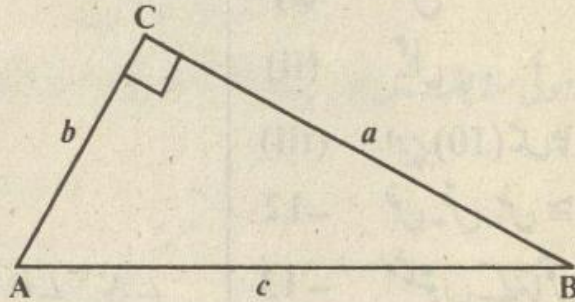
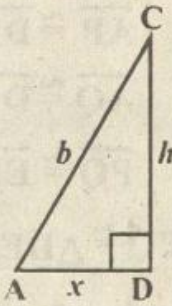
4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویے سے وتر پر کھینچا گیا عمود مثلث کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتا ہے۔

6.4 مسئلہ فیثا غورث (Pythagoras Theoram)

مسئلہ 7

قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

معلوم: مثلث ΔABC میں $\angle C$ قائمہ زاویہ ہے۔
وتر کی لمبائی c ہے اور $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$
کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہیں۔

مطلوب: $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$ یعنی $c^2 = a^2 + b^2$

عمل: $\overline{AB}$ پر ایک عمود $\overline{CD}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کے نقطہ D پر ملتا ہے۔ فرض کیجیے $m\overline{CD} = h$ اور $m\overline{AD} = x$
تو $m\overline{BD} = c - x$ مندرجہ ذیل اشکال کو مدنظر رکھیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\Delta ADC \leftrightarrow \Delta ACB$ میں	1-
(i) $\angle A \cong \angle A$	(i) ذاتی تماثل
(ii) $\angle ADC \cong \angle ACB$	(ii) ہر ایک زاویہ قائمہ ہے
2- $\angle ACD \cong \angle B$	2- مسئلہ 5 نتیجہ صریح 6 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3- لہٰذا $\Delta ADC \cong \Delta ACB$	3- مسئلہ 6 کی رو سے
اور $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$	
یعنی $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$	
$\Rightarrow b^2 = cx \quad \ldots (i)$	وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب
4- اسی طرح $\Delta BCD \sim \Delta ABC$	4- مندرجہ بالا طریقہ کار سے

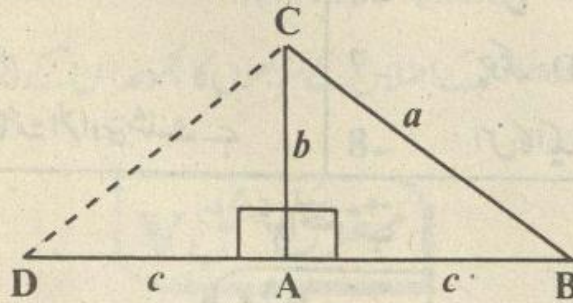
5- مسئلہ 6 کی رو سے	5- $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{BC}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$
وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب خاصیت تقسیمی	$\Rightarrow \dfrac{c-x}{a} = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow a^2 = c(c-x)$ $\Rightarrow a^2 = c^2 - cx \ .... \ (ii)$
6- (i) اور (ii) کو جمع کرتے ہوئے برابری کی خاصیت تشاکل	6- $\therefore a^2 + b^2 = c^2 - cx + cx$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ یا $c^2 = a^2 + b^2$ یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح: اگر قائمہ مثلث میں قائمہ زاویے کے راس سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو باقی دونوں اضلاع میں سے کسی ایک کا مربع وتر اور اس ضلع کے متصل قطعہ کے تحت بننے والے مستطیل کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ 7 (الف)

(مسئلہ 7 کا عکس)

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی کے مربع کے برابر ہو تو مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔

معلوم: ΔABC میں $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AB})^2$

یعنی $a^2 = b^2 + c^2$

جبکہ $\overline{BC}, \overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کی بالترتیب لمبائیاں a, b اور c ہیں۔

مطلوب: $m\angle CAB = 90^\circ$

یعنی ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل: $\overline{AC}$ کے نقطے A پر عمود $\overline{AD}$ اس طرح گرائیے کہ $m\overline{AD} = m\overline{AB}$

C اور D کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ قائمۃ الزاویہ مثلث CAD میں $(m\overline{CD})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AD})^2$ $= b^2 + c^2$ $= a^2$	1۔ مسئلہ فیثاغورث معلوم: $a^2 = b^2 + c^2$
2۔ $m\overline{CD} = a$ $= m\overline{BC}$	2۔ دونوں اطراف کا جذر المربع لینے معلوم: $m\overline{BC} = a$
3۔ $\Delta CAD \leftrightarrow \Delta CAB$ میں	3۔
(i) $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	(i) اوپر (2) میں ثابت کیا
(ii) $\overline{AD} \cong \overline{AB}$	(ii) عمل
(iii) $\overline{CA} \cong \overline{CA}$	(iii) مشترک
4۔ $\therefore \Delta CAD \leftrightarrow \Delta CAB$	4۔ ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
5۔ $\therefore \angle CAD \cong \angle CAB$	5۔ مثلثوں کے تماثل کی رو سے
6۔ لیکن $m\angle CAD = 90°$	6۔ عمل
7۔ $\therefore m\angle CAD = 90°$	7۔ چونکہ $\angle CAB = \angle CAD$
8۔ پس ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے	8۔ اس کا ایک زاویہ قائمہ ہے۔

فہو المطلوب

مشق 6.7

1۔ مثلث کے اضلاع کی مقداریں دی گئی ہیں اس میں کون سا قائمۃ الزاویہ مثلث ہے اور کیوں؟

(i) 5cm, 4cm, 3cm (ii) 10cm, 8cm, 6cm

(iii) 13cm, 12cm, 5cm (iv) $(x^2 + y^2)$ اکائیاں، $(2xy)$ اکائیاں، $(x^2 - y^2)$ اکائیاں

(v) 8, 7, 6 اکائیاں

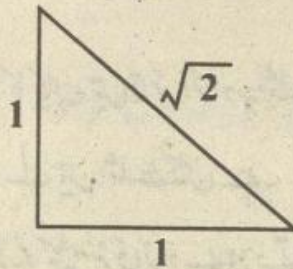
2۔ 60 فٹ اونچی دیوار کے ساتھ 65 فٹ لمبی سیڑھی کا اوپر کا حصہ لگا ہوا ہے۔ سیڑھی کے نیچے کا حصہ دیوار سے کتنی دور ہے؟

3۔ (الف) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی 6 اکائیاں ہے۔ مثلث کے کسی ایک ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(ب) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی $2x$ اکائیاں ہے۔ مثلث کے ہر ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4۔ مسئلہ فیثاغورث کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل قطعات کھینچیے۔

$\sqrt{13},\ \sqrt{17},\ \sqrt{5},\ \sqrt{2}$

(اشارہ: ہر عدد کو دو حصوں میں اس طرح توڑیے کہ ہر حصہ ایک مکمل مربع مثلاً $2 = 1^2 + 1^2$ ، $13 = 2^2 + 3^2$ وغیرہ پھر ان اضلاع اور ان کے درمیان قائمہ زاویہ لیتے ہوئے مثلث بنایئے وتر $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{13}$ وغیرہ ہوگی یعنی

5۔ ΔABC کے اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ پر P اور Q بالترتیب نقاط ہیں اور زاویہ قائمہ نقطہ C پر ہے ثابت کیجیے۔

$$(m\overline{PQ})^2 + (m\overline{AB})^2 = (m\overline{PB})^2 + (m\overline{AQ})^2$$

6۔ چوکور ABCD کے وتر زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔

$$(m\overline{AB})^2 + (m\overline{CD})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AD})^2$$

7۔ ثابت کیجیے کہ معین *(Rhombus)* کے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

متفرق مشق V

1۔ خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) دو مختلف نقاط ______ کا تعین کرتے ہیں۔

(ii) ہر خط کم از کم ______ مختلف نقاط رکھتا ہے۔

(iii) ہر مستوی کم از کم ______ غیر ہم خط نقاط پر مشتمل ہوتی ہے۔

(iv) دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے ______ کا اصول موضوعہ کہلاتا ہے۔

(v) متشابہ مثلثوں میں ______ متماثل ہوتے ہیں۔

(vi) کسی مثلث میں اس کے دو اضلاع کی مقداریں کا مجموعہ ہمیشہ ________ ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

(vii) کسی خط کے باہر کسی نقطے سے ________ سب سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

(viii) ΔABC میں $m\angle B = 90^\circ$ تو $a^2 + c^2 =$ ________

(ix) کسی قائمہ مثلث میں ________ تمام اضلاع میں سب سے بڑا ہوتا ہے۔

(x) کسی مثلث کے ایک زاویے کا ________ اس کے متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

2۔ درست اور غلط بیانات کی نشاندہی کیجیے۔

(i) مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 6, 8 اور 10 اکائیاں ہیں قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

(ii) مثلث جس کے اضلاع $1cm$, $2cm$ اور $3cm$ لمبے ہیں مثلث نہیں ہے۔

(iii) ΔABC میں $m\angle C = 90^\circ$ ہے تو $\angle A$ اور $\angle B$ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

(iv) اگر دو مثلثیں متشابہ ہوں تو وہ ہمیشہ متماثل ہوتی ہیں۔

(v) اگر وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے برابر ہے تو یہ قائمہ الزاویہ مثلث متماثل الساقین ہو سکتی ہے۔

عملی علم ہندسہ

7.1 کسی مثلث کا محاصر دائرہ کھینچنا

تعریف: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرے، مثلث کے محاصر دائرہ (*Circum Circle*) کہلاتا ہے۔

مثال: مثلث ABC کا محاصر دائرہ کھینچیے۔

معلوم: مثلث ABC

مطلوب: مثلث ABC کے راسوں B, A اور C سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا۔

عمل:

(i) مثلث ABC کھینچیے۔

(ii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچنے کے لیے A اور B کو مراکز مان کر $\overline{AB}$ کے دونوں اطراف قوسیں کھینچیے جو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتیں ہیں۔ P اور Q کو ملایئے اور اسے P اور Q سے پرے بڑھایئے۔

(iii) اسی طرح $\overline{BC}$ کا عودی ناصف $\overleftrightarrow{RS}$ کھینچیے۔

(iv) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

(v) ان O کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{OA}$ یا $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ کے برابر لے کر ایک دائرہ کھینچیے۔

یہ دائرہ دی گئی مثلث کے راسوں B, A اور C سے گزرتا ہے

پس یہی مثلث ABC کا مطلوبہ محاصر دائرہ ہے۔

7.2 مثلث کا محصور دائرہ کھینچنا

تعریف: ایسا دائرہ جو کسی مثلث کے تمام اضلاع کو مس کرتا ہے۔ مثلث کا محصور دائرہ (*Inscribed or In cricle*) کہلاتا ہے۔

مثال: مثلث PQR کا محصور دائرہ کھینچیے۔

معلوم: مثلث PQR کے تمام اضلاع $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ کو مس کرتا ہوا دائرہ کھینچنا ہے۔

عمل: (i) مثلث PQR کھینچیے۔

(ii) زاویہ Q کا ناصف $\overrightarrow{QX}$ کھینچنے کے لیے Q کو مرکز مان کر کسی رداس کی ایک قوس بنائی جو اضلاع $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتی ہے۔ اب A اور B کو مراکز مان کر اسی رداس کی دو قوسیں بنائیں جو ایک دوسرے کو نقطہ X پر قطع کرتی ہیں۔
Q اور X کو ملائیے اور اسے بڑھائیے۔

(iii) اسی طرح زاویہ R کے ناصف $\overrightarrow{RY}$ کھینچیے۔

(iv) $\angle Q$ اور $\angle R$ کے ناصف $\overrightarrow{QX}$ اور $\overrightarrow{RY}$ ایک دوسرے کو نقطہ I پر قطع کرتے ہیں۔

(v) I کو مرکز مان کر مناسب رداس کی ایک قوس کھینچیے جو $\overline{QR}$ کو نقاط C اور D پر قطع کرے۔

(vi) نقاط C اور D کو مراکز مان کر ایک ہی رداس کی دو قوسیں کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کریں۔

(vii) $\overline{IT}$ کھینچیے جو $\overline{QR}$ کو نقطہ S پر قطع کرے۔
I سے $\overline{QR}$ پر $\overline{IS}$ عمود ہے۔

(viii) I کو مرکز مان کر $m\overline{IS}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیے۔

یہ دائرہ مثلث PQR کے اضلاع $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ کو مس کرتا ہے۔ پس یہی مثلث PQR کا محصور دائرہ ہے۔

7.3 مثلث کے راس کے مقابل جانبی دائرہ کھینچنا

مثال: مثلث ABC کے راس A کے مقابل جانبی دائرہ *(Escribed Circle)* کھینچیے۔

معلوم: مثلث ABC

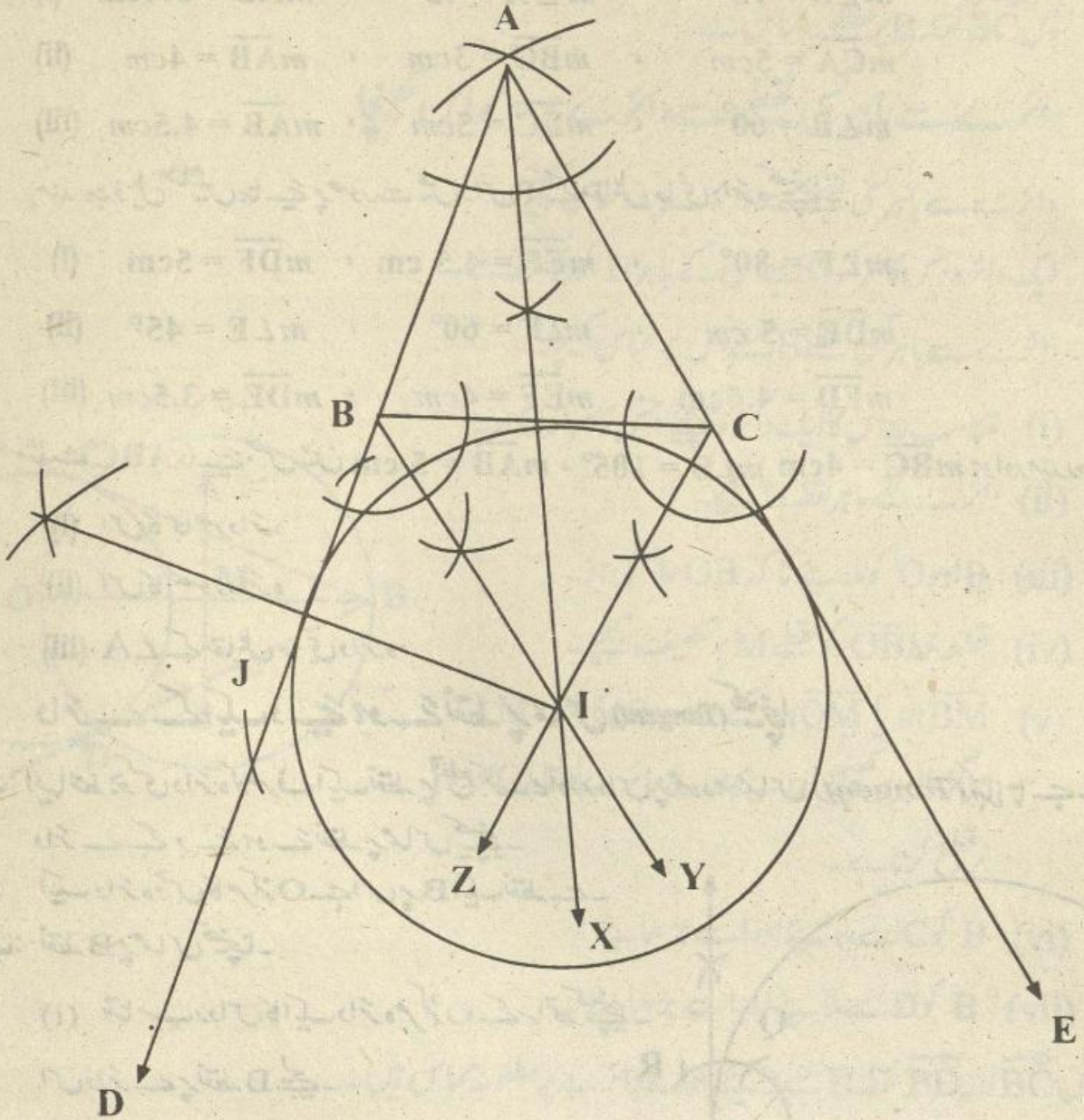
مطلوب: مثلث ABC کے راس A کے مقابل جانبی دائرہ کھینچنا۔

عمل: (i) مثلث ABC کھینچیے۔

(ii) $\overline{AB}$ کو B سے پرے اور $\overline{AC}$ کو C سے پرے بڑھائیے جو بیرونی زاویے CBD اور BCE بناتے ہیں۔

(iii) $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے بالترتیب ناصف $\overrightarrow{BY}, \overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{CZ}$ کھینچیے۔

(iv) یہ ناصف نقطہ I پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

(v) I سے $\overrightarrow{BD}$ پر عمود $\overline{IJ}$ کھینچیے۔

(vi) I کو مرکز مان کر اور $m\overline{IJ}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیے یہ دائرہ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ اور $\overline{BC}$ کو مس کرتا ہے۔

پس یہ دائرہ راس A کے مقابل مطلوبہ جانبی دائرہ ہے۔

اسی طرح راسوں B اور C کے مقابل جانبی دائرے کھینچے جاسکتے ہیں۔

مشق 7.1

-1 مندرجہ ذیل مثلثیں بنائیے۔ ہر صورت میں محصور اور محاصر دائرے الگ الگ کھینچیے۔

(i) $m\overline{AB} = 3.4cm$ ، $m\angle A = 42°$ ، $m\angle B = 73°$

(ii) $m\overline{AB} = 4cm$ ، $m\overline{BC} = 3cm$ ، $m\overline{CA} = 5cm$

(iii) $m\overline{AB} = 4.5cm$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ ، $m\angle B = 60°$

-2 مندرجہ ذیل مثلثیں بنائیے ہر صورت میں راس F کے مقابل جانبی دائرہ کھینچیے۔

(i) $m\overline{DF} = 5cm$ ، $m\overline{EF} = 4.5\ cm$ ، $m\angle F = 80°$

(ii) $m\angle E = 45°$ ، $m\angle F = 60°$ ، $m\overline{DF} = 5\ cm$

(iii) $m\overline{DE} = 3.5cm$ ، $m\overline{EF} = 4cm$ ، $m\overline{FD} = 4.6cm$

-3 مثلث ABC بنائیے جس میں $m\overline{AB} = 5\ cm$ ، $m\angle B = 105°$ $m\overline{BC} = 4cm$ ہو اور مندرجہ ذیل کھینچیے۔

(i) اس کا محاصر دائرہ

(ii) اس کا محصور دائرہ

(iii) $\angle A$ کے مقابل جانبی دائرہ

7.4 دائرے کے ایک دیئے ہوئے نقطہ پر مماس (Tangent) کھینچنا

تعریف: ایسا خط جو کسی دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرے اور رداس پر عمود ہو مماس (Tangent) کہلاتا ہے۔

مثال: دائرے کے دیئے ہوئے نقطہ پر مماس کھینچیے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اس پر B ایک نقطہ ہے۔

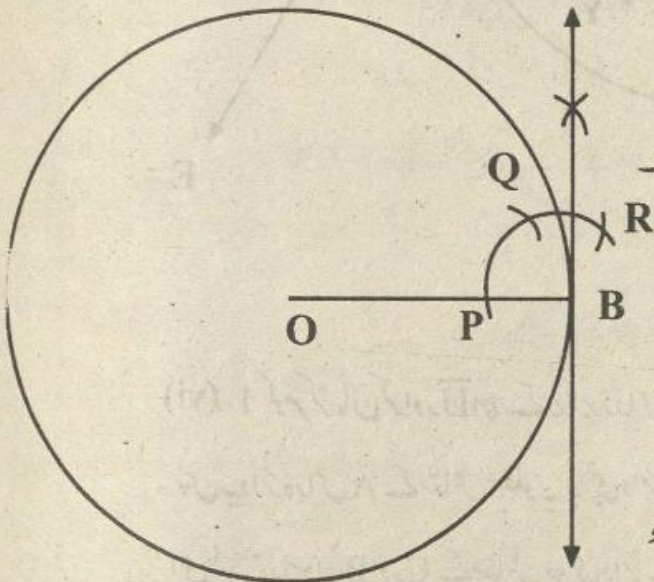
مطلوب: نقطہ B پر مماس کھینچنا۔

عمل: (i) متناسب رداس کا ایک دائرہ مرکز O کے ساتھ کھینچیے۔

اس دائرے پر نقطہ B لیجیے۔

(ii) O اور B کو ملائیے۔

(iii) B مرکز مان کر کسی بھی رداس کی ایک قوس کھینچیے جو $\overline{OB}$ کو نقطہ P پر قطع کرتی ہے۔

(iv) اسی قوس پر P کو مرکز مان کر اسی رداس کے ساتھ دو قوسیں بنائیے جو نقاط Q اور R قطع کرتی ہوں۔

(v) نقطہ Q اور R سے اسی رداس کی دو قوسیں کھینچئے جو ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتی ہوں۔

(vi) B اور C کو ملا کر $\overline{CB}$ کھینچئے جو $\overline{OB}$ کے نقطہ B پر عمود ہو۔

(vii) $\overline{BC}$ کو B اور C سے پرے بڑھائیے۔

پس $\overleftrightarrow{BC}$ نقطہ B پر مطلوبہ مماس ہے۔

7.5 دائرے سے باہر کسی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچنا

مثال: دائرے سے باہر کسی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچئے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کے باہر B کوئی نقطہ ہے۔

مطلوب: دائرے سے باہر کسی نقطے B سے اس پر مماس کھینچا۔

عمل: (i) متناسب رداس کا ایک دائرہ کھینچئے جس کا مرکز O ہو۔

(ii) دائرے سے باہر نقطہ B لیجیے۔

(iii) B اور O کو ملائیے تا کہ OB حاصل ہو۔

(iv) قطعہ خط $\overline{OB}$ کو نقطے M پر تنصیف کیجیے۔

(v) $m\overline{BM}$ یا $m\overline{OM}$ کے برابر رداس کا دائرہ M کو مرکز مان کر کھینچئے جو دیئے ہوئے دائرے کو نقاط C اور D پر قطع کرتا ہے۔

(vi) B کو C سے ملائیے اور اسے بڑھائیے۔

(vii) B کو D سے ملائیے اور اسے بڑھائیے۔

پس $\overrightarrow{BC}$ اور $\overrightarrow{BD}$ نقطہ B سے دیئے ہوئے دائرے پر مطلوبہ مماس ہیں۔

7.6 دیئے ہوئے دائروں پر راست مشترک مماس کھینچنا

تعریف: اگر دو دائرے کے مشترک مماس کے نقاط مماس ان کے مراکز کو ملانے والے خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ایسے مشترک مماس کو راست مشترک مماس (Direct Common tangent) کہتے ہیں۔

اس صورت میں دیئے گئے دائرے مختلف یا مساوی رداس کے ہو سکتے ہیں۔ ذیل میں ان دونوں پہلوؤں پر بحث کی گئی ہے۔

7.6.1 مختلف رداس کے دائروں پر راست مشترک مماس (Direct common tangents) کھینچنا

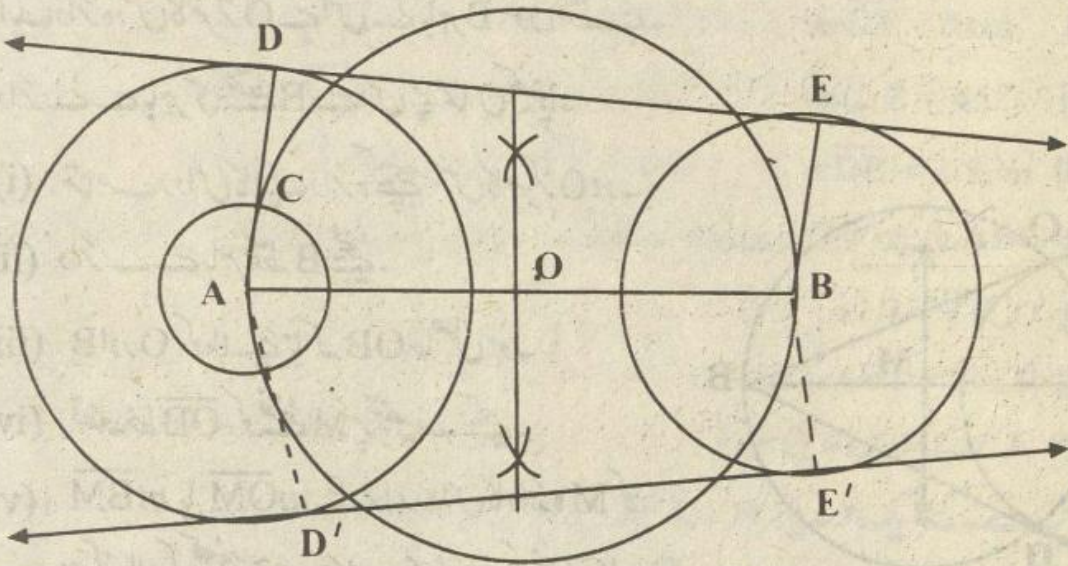
مثال: 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائروں پر راست مشترک مماس کھینچئے جبکہ یہ دونوں دائرے ایک دوسرے کے اندر واقع نہیں ہیں۔

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں اور بالترتیب رداس 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہیں جبکہ ان میں سے کوئی ایک دوسرے کے اندر واقع نہیں ہیں۔

مطلوب: ان دو دائروں پر راس مشترک مماس کھینچنا۔

مختلف رداس کے دو دائروں پر راست مشترک مماس کھینچنے کے دو طریقے ہیں جنہیں ذیل میں واضح کیا گیا ہے۔

پہلا طریقہ:

عمل:

(i) 3 سینٹی میٹر 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچئے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہوں۔

(ii) A اور B کو ملائیے تا کہ $\overline{AB}$ حاصل ہو۔

(iii) قطعہ خط $\overline{AB}$ کو نقطہ O سے تنصیف کیجیے۔

(iv) دیئے گئے دونوں رداسوں کے فرق 1 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ A کو مرکز مان کر کھینچئے۔

(v) $m\overline{OA}$ یا $m\overline{OB}$ کے مساوی رداس کا دائرہ O کو مرکز مان کر کھینچئے جو چھوٹے دائرے کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے۔

(vi) A کو C سے ملائیے اور اسے بڑھائیے حتیٰ کہ یہ دیئے ہوئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ D پر قطع کرے۔

(vii) $\overline{AD}$ کے متوازی دوسرے دائرے کا رداس $\overline{BE}$ کھینچئے۔

(viii) D اور E کو ملائیے اور اسے دونوں جانب سے بڑھائیے لہٰذا $\overleftrightarrow{DE}$ مطلوبہ مماسوں میں سے ایک ہے۔

(ix) اسی طرح $\overleftrightarrow{D'E'}$ دوسری طرف کھینچئے۔

پس دیئے گئے دائروں پر $\overleftrightarrow{DE}$ اور $\overleftrightarrow{D'E'}$ مطلوبہ راست مشترک مماس ہیں۔

دوسرا طریقہ:

عمل:

(i) 3 سینٹی میٹر اور 1.5 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچیے۔ جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہوں۔

(ii) A مرکز والے دائرے پر نقطہ P_1 لیجیے۔

(iii) A کو P_1 سے ملائیے۔

(iv) $\overline{AP_1}$ کے متوازی $\overline{BP_2}$ کھینچیے۔

(v) P_1 کو P_2 سے ملائیے اور اسے آگے بڑھائیے۔

(vi) A اور B کو ملائیے اور اسے اتنا بڑھائیے کہ نقطہ S پر $\overline{P_1P_2}$ کو قطع کرے۔

(vii) S کو مرکز مان کر $m\overline{SB}$ رداس کی قوس کھینچیے جو B مرکز والے دائرے کو نقاط T_1 اور T_1' پر قطع کرے۔

(viii) S کو T_1 اور T_1' ملائیے اور انہیں اتنا بڑھائیے کے دوسرے دائرے کے نقاط T_2 اور T_2' پر مل جائیں۔

پس $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ اور $\overleftrightarrow{T_1'T_2'}$ دیئے ہوئے دائروں پر مطلوبہ راست مشترک مماس ہیں۔

7.6.2 مساوی رداس کے دو دیئے ہوئے دائروں پر راست مشترک مماس کھینچنا

مثال: 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دیئے ہوئے دائروں پر راست مشترک مماس کھینچیے۔

معلوم: 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے، جن کے مراکز A اور B ہیں۔

مطلوب: ان دو دائروں پر راست مشترک مماس کھینچنا۔

(i) 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچیے جن کے مراکز A اور B ہیں۔

(ii) نقاط A اور B کو ملایئے۔

(iii) $\overline{AB}$ کو نقاط A اور B پر بالترتیب $\overline{AT_1}$ اور $\overline{BT_2}$ عمود کھینچیے جو دیئے ہوئے دائروں کو بالترتیب نقاط T_1 اور T_2 پر قطع کرتے ہیں۔

(iv) T_1 اور T_2 کو ملایئے اور اسے دونوں جانب بڑھایئے یوں $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ مطلوبہ راست مشترک مماس میں سے ایک ہے۔

(v) اسی طرح $\overline{T'_1T'_2}$ کی دوسری طرف کھینچیے۔

پس $\overline{T_1\ T_2}$ اور $\overline{T'_1T'_2}$ دیئے ہوئے دائروں پر مطلوبہ راست مشترک مماس ہیں۔

نکتہ: یہ واضح رہے کہ جب دیئے ہوئے دائرے مساوی رداس ہوں تو راست مشترک مماس دائروں کے مراکز کے ملانے والے خط کے متوازی ہوتی ہیں۔

7.7 دو دیئے ہوئے دائروں پر عرضی مشترک مماس کھینچنا

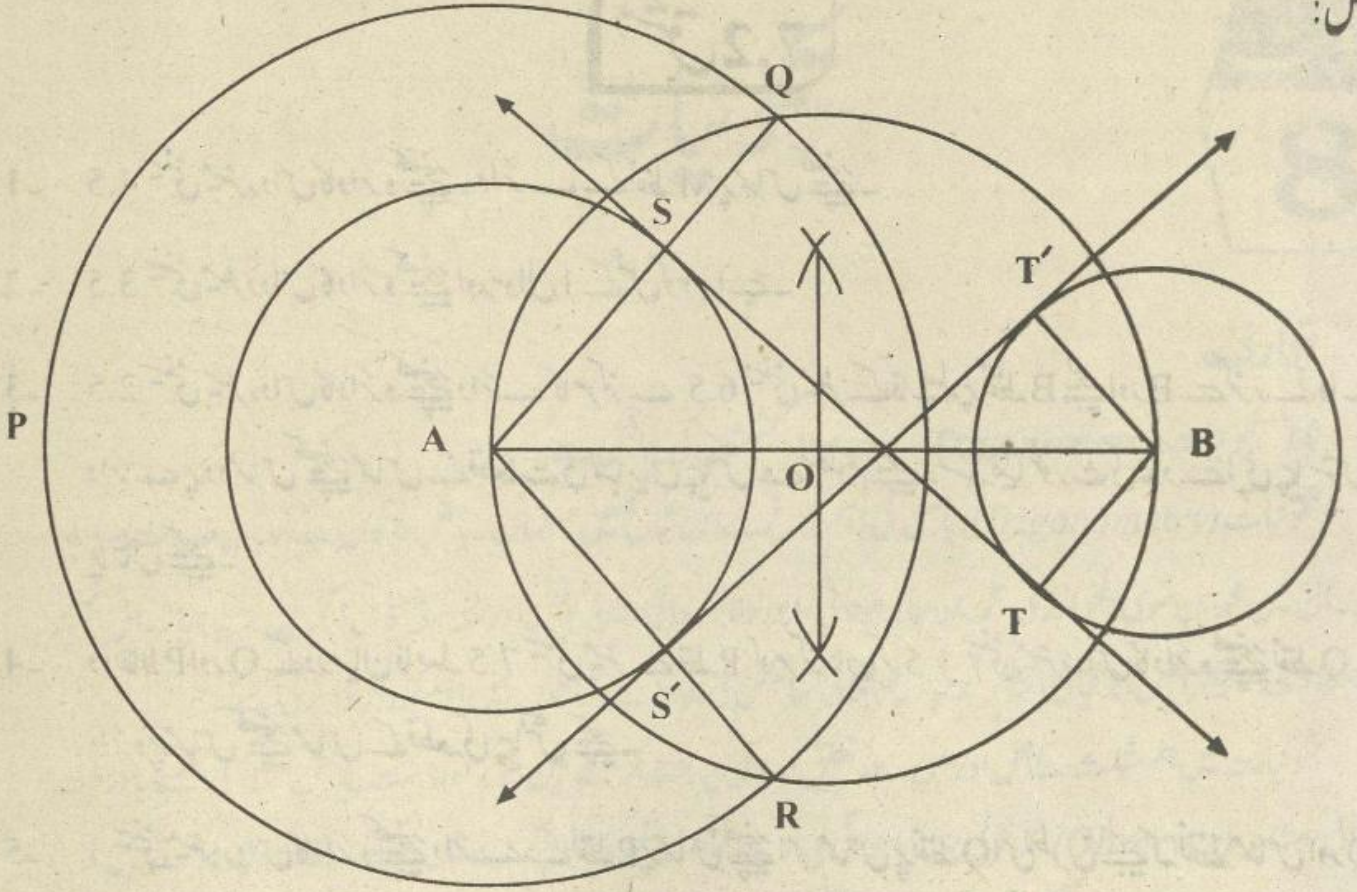
تعریف: اگر دو دائروں کے مشترک مماس کے نقاط مماس ان کے مراکز کو ملانے والے خط کے مخالف اطراف میں واقع ہوں تو ایسے مماس کو عرضی مشترک مماس *(Transnese Common Tangents)* کہتے ہیں۔

مثال: 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائروں پر عرضی مشترک مماس کھینچیے جو ایک دوسرے سے باہر واقع ہوں۔

معلوم: 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہیں۔

مطلوب: ان دائروں پر عرضی مشترک مماس کھینچنا۔

عمل:

P, Q, S, T′, A, O, B, T, S′, R

(i) 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس دو دائرے کھینچیے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہیں۔

(ii) A کو مرکز مان کر مذکورہ رداسوں کے مجموعہ 5 سینٹی میٹر رداس کا ایک بڑا دائرہ کھینچیے۔

(iii) A اور B کو ملائیے۔

(iv) $\overline{AB}$ کی نقطہ O تنصیف کیجیے۔

(v) O کو مرکز مان کر $m\overline{OA}$ یا $m\overline{OB}$ رداس کا دائرہ کھینچیے جو بڑے دائرے کو نقاط Q اور R پر قطع کرتا ہے۔

(vi) A کو Q سے ملائیے جو مرکز A والے دائرے کو نقطہ S پر قطع کرتا ہے۔

(vii) $\overline{AQ}$ کے متوازی مگر مخالف سمت میں دوسرے دائرے کا رداس $\overline{BT}$ کھینچیے۔

(viii) S اور T کو ملائیے اور دونوں جانب بڑھائیے یوں $\overline{ST}$ مطلوبہ عرضی مشترک مماس میں سے ایک ہے۔

(ix) اسی طرح دوسرا عرضی مشترک مماس $\overleftrightarrow{S'T'}$ کھینچیے۔

پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{S'T'}$ دیے ہوئے دائروں پر مطلوبہ عرضی مشترک مماس ہیں۔

مشق 7.2

1۔ 4.5 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیے ۔دائرے کے نقطہ M پر مماس کھینچیے۔

2۔ 3.5 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیے اور سوال 1 کے عمل کو دہرائیے۔

3۔ 2.5 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیے دائرے کا مرکز سے 6.5 سینٹی میٹر کے فاصلے پر نقطہ B لیجیے اور B سے گزرنے والے دائرے پر دو مماس کھینچیے مماس کے قطعات کی لمبائیاں پیائش سے معلوم کیجیے۔ مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے اپنی پیائشوں کی پڑتال کیجیے۔

4۔ دو نقاط P اور Q کے درمیان فاصلہ 7.5 سینٹی میٹر ہے نقطہ P کو مرکز مان کر 4.5 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیے نقطہ Q سے دائرہ پر مماس کھینچیے مماس کے قطعہ کی پیائش کیجیے۔

5۔ 3 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیے دائرے کے نقطہ P پر مماس کھینچیے اس مماس پر نقطہ Q اس طرح لیجیے کہ نقطہ مماس اور Q کے درمیان فاصلہ 4 سینٹی میٹر ہو مرکز اور نقطہ Q کے درمیان فاصلہ کی پیائش کیجیے۔ مسئلہ فیثا غورث کے ذریعے اپنی پیائشوں کی پڑتال کیجیے۔

6۔ 7 سینٹی میٹر کے فاصلے پر دو نقاط P اور Q لیجیے نقاط P اور Q کو مراکز مان کر بالترتیب 2.8 سینٹی میٹر اور 1.6 سینٹی میٹر رداسوں کے دائرے کھینچیے ۔ان دائروں پر راست مشترک مماس کھینچیے ۔ ہر ایک دائرہ کے نقاط مماس کو ملانے والے قطعہ خط کی پیائش کیجیے۔

7۔ 3 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچیے جن کے مراکز کے درمیان فاصلہ 9 سینٹی میٹر ہو ان دائروں پر عرضی مشترک مماس کھینچیے ان کے نقاط مماس کو ملانے والے قطعات خط کی پیائش کیجیے۔

تکونیات

8.1 تعارف

لفظ ''تکونیات **Trigonometry**'' سے مراد مثلثوں کی پیائش ہے۔

تکونیات (*Trigonometry*) ریاضی کی اہم شاخ ہے اس شاخ میں مسلمان ریاضی دانوں نے نمایاں خدمات سرانجام دی ہیں۔ان میں محمد بن موسی الخوارزمی، محمد بن جابر البتانی، ابوالوفابوز جانی، ابن یونس اور البیرونی قابل ذکر ہیں۔ یہ جہاز رانی، نقشہ سازی، مساحت، الیکٹرانکس، برقیاتی انجینئرنگ اور طبیعاتی سائنس کی بہت سے شاخوں میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔

تکونیات میں ہم مثلث کے حل اور اس سے متعلق مسائل پر بحث کرتے ہیں جو براہ راست پیائش مثلاً کسی کھمبے یا درخت کی اونچائی، مشاہد (*Observer*) کا بحری جہاز یا ہوائی جہاز سے فاصلہ وغیرہ معلوم کرنے میں بہت مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

اس باب میں ہم صرف قائمۃ الزاویہ مثلث (یا صرف قائمہ مثلث) ہی زیر بحث لائیں گے مثلث کے تینوں زاویے اور تینوں اضلاع مثلث کے اجزاء کہلاتے ہیں۔لہٰذا مثلث کے چھ اجزاء ہوتے ہیں اگر ان میں سے تین اجزاء جن میں کم از کم ایک ضلع ہو کی مقداریں معلوم ہوں تو دیگر اجزاء کی مقداریں معلوم کی جاسکتی ہیں۔مثلث کے نامعلوم اجزاء کی مقداریں معلوم کرنے کے لیے ہمیں تکونیات کی ضرورت پڑتی ہے۔

8.2 حادہ زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں

سامنے کی شکل میں ACB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں زاویہ C قائمہ زاویہ ہے۔ $\angle A$, $\angle B$ اور $\angle C$ کے متقابلہ اضلاع کی مقداریں بالترتیب b , a اور c سے ظاہر کی گئی ہیں یعنی

$$m\overline{AB} = c \text{ اور } m\overline{CA} = b,\ m\overline{BC} = a$$

کسی قائمہ مثلث کے حادہ زاویے کے لئے کوئی سے دو اضلاع کی نسبت تکونیاتی نسبت (*Trigonomatric*) کہلاتی ہے۔ حادہ زاویے کے لیے ہمارے پاس چھ ممکن نسبتیں ہیں۔ جنہیں ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

قائمہ مثلث ABC کے زاویے A کی مقدار θ کے لیے

(i) sine θ $= \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \frac{a}{c} =$ زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار / وتر کی مقدار

(ii) cosine θ $= \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} =$ زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار / وتر کی مقدار

(iii) tangent θ $= \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \frac{a}{b} =$ زاویہ A کے متقابلہ ضلع کی مقدار / زاویہ A کے متصلہ ضلع کی مقدار

(iv) cotangent θ $= \frac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \frac{b}{a}$

(v) secant θ $= \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \frac{c}{b}$

(vi) cosecant θ $= \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \frac{c}{a}$

نوٹ: θ یونانی حروف تہجی کا ایک حرف جسے تھیٹا *(Theta)* پڑھتے ہیں۔ ان نسبتوں پر غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ θ کے لیے نسبتیں *sine* اور *cosecant*، *cosine* اور *secant*، *tangent* اور *cotangent* بالترتیب ایک دوسرے کے معکوس ہیں یعنی

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{یا} \quad \text{sine}\,\theta = \frac{1}{\text{cosin}\,\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{یا} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{یا} \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

پس $\sin\theta\ \text{cosec}\,\theta = 1$ ، $\cos\theta\ \sec\theta = 1$ اور $\tan\theta\ \cot\theta = 1$

نکات:

1۔ زیر غور زاویے کے متقابلہ ضلع کو عمود متصور کیا جاتا ہے اور متصلہ ضلع کو اساس کہا جاتا ہے۔

2۔ قائمہ مثلث میں ایک حادہ زاویے کے لیے عمود دوسرے زاویے کے لیے اساس ہوتا ہے۔ اس کے برعکس بھی درست ہے۔

مشق 8.1

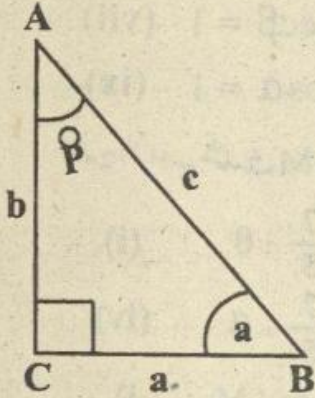
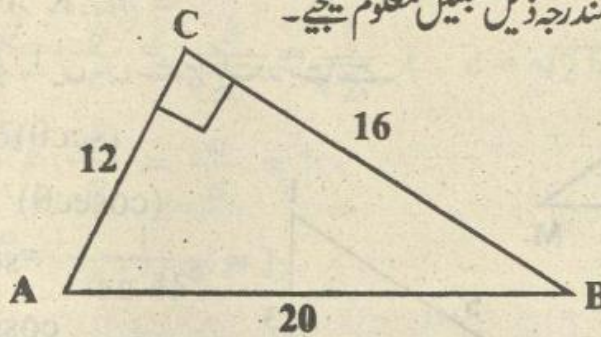
-1 سامنے کی شکل کی مدد سے مندرجہ ذیل بیانات کے متعلق بتائیے درست یا غلط۔

(i) $\sin\beta = \frac{a}{c}$ (ii) $\cos\beta = \frac{b}{c}$

(iii) $\tan\beta = \frac{b}{a}$ (iv) $\cot\alpha = \frac{a}{b}$

(v) $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ (vi) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$

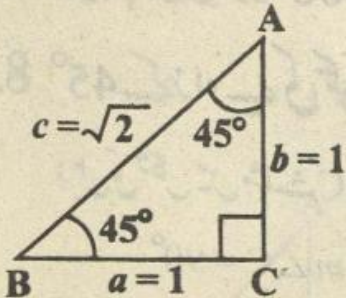
(vii) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\beta}$ (viii) $\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

(ix) $\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta}$ (x) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\beta}$

-2 نیچے دی ہوئی شکل کی مدد سے مندرجہ ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) $\sin(m\angle A)$ (ii) $\cos(m\angle A)$ (iii) $\tan(m\angle A)$

(iv) $\sin(m\angle B)$ (v) $\cos(m\angle B)$ (vi) $\tan(m\angle B)$

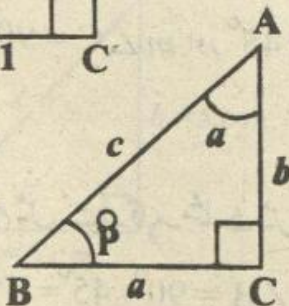
(vii) $\cot(m\angle A)$ (viii) $\sec(m\angle A)$ (xi) $\operatorname{cosec}(m\angle A)$

(x) $\cot(m\angle B)$ (xi) $\sec(m\angle B)$ (xii) $\operatorname{cosec}(m\angle B)$

-3 سامنے کی شکل کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) $\sin 45^\circ$ (ii) $\cos 45^\circ$ (iii) $\tan 45^\circ$

(iv) $\cot 45^\circ$ (v) $\sec 45^\circ$ (vi) $\operatorname{cosec} 45^\circ$

-4 سامنے کی شکل کی مدد سے ثابت کیجیے۔

(i) $\sin\alpha = \cos\beta$ (ii) $\tan\alpha = \cot\beta$

(iii) $\sec\alpha = \operatorname{cosec}\beta$ (iv) $\sin\beta = \cos\alpha$

(v) $\tan\beta = \cot\alpha$ (vi) $\sec\beta = \operatorname{cosec}\alpha$

5۔ سوال 4 کی شکل استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

(i) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (ii) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(iii) $\cot\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$ (iv) $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

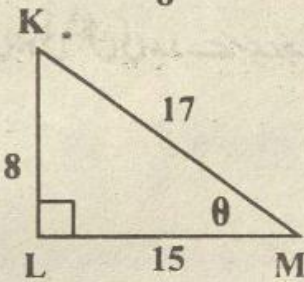
(v) $\tan\alpha\cot\alpha = 1$ (vi) $\sin\alpha\ \mathrm{cosec}\,\alpha = 1$

(vii) $\sin\beta\ \mathrm{cosec}\,\beta = 1$ (viii) $\sec\beta\cos\beta = 1$

(ix) $\sec\alpha\cos\alpha = 1$ (x) $\tan\beta\cot\beta = 1$

6۔ قائمۃ الزاویہ مثلث KLM کی مدد سے ذیل میں دیئے ہوئے زاویہ کے لئے تکونیاتی نسبت لکھیے۔

(i) $\dfrac{17}{15}, \theta$ (ii) $\dfrac{17}{8}, \theta$ (iii) $\dfrac{15}{8}, \theta$

(iv) $\dfrac{17}{15}, \alpha$ (v) $\dfrac{8}{15}, \alpha$ (vi) $\dfrac{17}{8}, \alpha$

7۔ ΔDEF کی مدد سے ثابت کیجیے کہ ذیل میں سے ہر ایک درست ہے۔

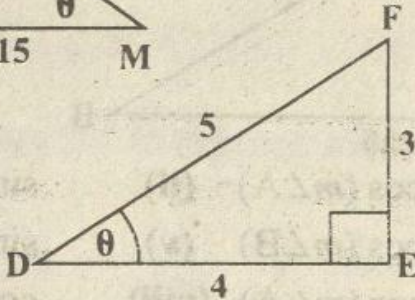
(i) $(\sec\theta)^2 \quad (\tan\theta)^2 = 1$

(ii) $(\mathrm{cosec}\,\theta)^2 \quad (\cot\theta)^2 = 1$

(iii) $\sec\theta \ \cos\theta = 1$

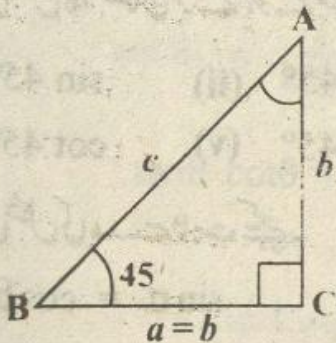
(iv) $\mathrm{cosec}\,\theta \ \sin\theta = 1$

(v) $\tan\theta \ \cot\theta = 1$

(vi) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

8.3 °30، °45 اور °60 کے زاویوں کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں

8.3.1 °45 کے زاویے کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا

ذیل کی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ زاویہ ہے جس میں

$m\angle B = 45^\circ$ اور $m\angle C = 90^\circ$

ہمارے علم میں ہے کہ قائمہ مثلث میں حادہ زاویے ایک دوسرے کے کمپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

لہذا $m\angle A = 90^\circ - m\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

ہمارے علم میں یہ بھی ہے کہ اگر کسی مثلث کے دوزاویوں کی مقداریں مساوی ہوں تو ان کے متقابلہ اضلاع کی مقداریں بھی مساوی ہوتی ہیں یعنی

$$m\angle A = m\angle B = 45^\circ$$

لہٰذا $m\overline{BC} = m\overline{AC}$

یا $a = b$ (اساس = عمود)

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$c^2 = a^2 + b^2 = b^2 + b^2$ (چونکہ $a = b$)

یا $c^2 = 2b^2$

لہٰذا $c = \sqrt{2}b$ (وتر)

پس

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because c = \sqrt{2}b)$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because c = \sqrt{2}b,\ a = b)$$

$$\tan 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

مثال: قائمہ مثلث لیجیے جس میں عمود اور اساس 5 سینٹی میٹر کی مقدار کے ہیں اساس پر بننے والے حادہ زاویے کی تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے

حل: چونکہ $b = 5cm,\ a = 5cm$ تو $\theta = 45^\circ = m\angle B$

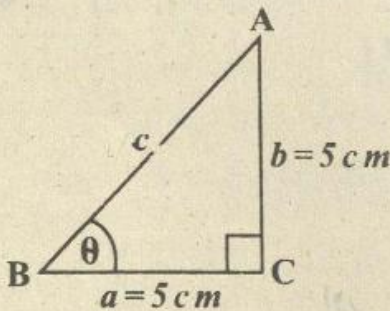
مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$

لہٰذا $c^2 = (5)^2 + (5)^2$

$$= 50$$

یا $c = 5\sqrt{2}\ cm$

A, B, C, c, θ, b = 5 cm, a = 5 cm

پس $\sin\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = \frac{5}{5} = 1$

$\text{cosec}\theta = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$, $\sec\theta = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$, $\cot\theta = \frac{5}{5} = 1$

اگر اساس اور عمود 10 سینٹی میٹر کی مقدار کے ہوں تو تکونیاتی نسبتوں پر کیا اثر مرتب ہوگا؟

8.3.2 30° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا

سامنے کی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ مثلث ہے

جس میں $m\angle B = 30^\circ$ اور $m\angle c = 90^\circ$

ہمارے علم میں ہے کہ قائمہ مثلث کے 30° درجے کے حادہ زاویے کے لئے وتر کی مقدار یہ ہوتی ہے:

$c = 2b$ | عمود کی مقدار | 2 = | وتر کی مقدار |

مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$

یا $a^2 = c^2 - b^2$

$= (2b)^2 - b^2$ ($c = 2b$ چونکہ)

$= 4b^2 - b^2$

$= 3b^2$

لہٰذا $a = \sqrt{3}b$ (متصلہ ضلع یا اساس)

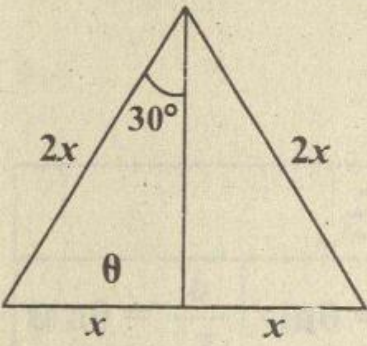
پس $\sin 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$ $(\because c = 2b)$

$\cos 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}b}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (چونکہ $c = 2b, a = \sqrt{3}b$)

$\tan 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{3}b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$

$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

اور $\text{cosec}30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$

نوٹ: متماثل الاضلاع مثلث میں ہر زاویہ 60 درجے کا ہوتا ہے۔
اگر وتر کی مقدار $= 2x$ تو 30 درجے کے زاویے کا متقابلہ ضلع x مقدار کا ہوتا ہے۔

مثال 1: قائمہ مثلث ABC لیجیے جس میں $m\angle B = 30$، $m\angle C = 90^\circ$ اور $m\overline{AC} = 4cm$ زاویہ B کی تمام چھ تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔
اگر $m\overline{AC} = 2cm$ تو تکونیاتی نسبتوں کی قیمتوں پر کیا اثر مرتب ہوگا؟

حل: ہمارے علم میں ہے کہ $\theta = 30^\circ = m\angle B,\ b = 4cm$

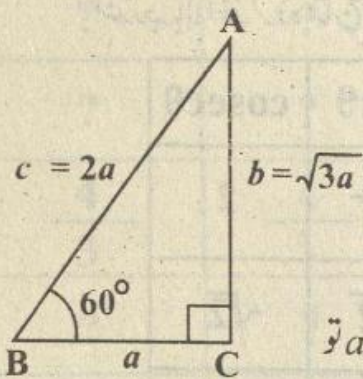
| وتر کی مقدار | = 2 | عمود کی مقدار | (چونکہ $\theta = 30^\circ$)

یا
$$c = 2b$$
$$= 2 \times 4 = 8cm$$

نیز
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$= 8^2 - 4^2 = 48$$

لہٰذا
$$a = \sqrt{48}\ cm = 4\sqrt{3}\ cm$$

پس $\sin\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ ، $\cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ وغیرہ وغیرہ

نوٹ: تکونیاتی نسبتیں وہی رہیں گی یعنی کسی زاویے کی نسبتوں پر اضلاع کی مقداریں کوئی اثر مرتب نہیں کرتیں۔

8.3.3 60° کے زاویے کے تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا

سامنے کی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ مثلث ہے۔
جس میں $m\angle C = 90^\circ$ اور $m\angle B = 60^\circ$
پس $m\angle A = 90^\circ - m\angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
ہم اوپر ملاحظہ کر چکے ہیں اگر زاویہ کی مقدار 30 درجے ہو اور اس کے متقابلہ ضلع کی مقدار a تو

$$|\text{وتر کی مقدار}| = c = 2a \quad \text{اور} \quad |\overline{AC}| = b = \sqrt{3}a$$

پس
$$\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

اور

$$\text{cosec } 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال 1: قائمہ مثلث ABC جس میں $m\angle C = 90^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$ اور $m\overline{BC} = 3cm$ ہے تو زاویہ B کی تمام چھ تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔ اگر $m\overline{BC} = 6cm$ تو کیا ہوگا؟

حل: چونکہ $m\angle B = 60^\circ = \theta,\ a = 3cm$

$m\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

چونکہ $c = 2a = 2 \times 3 = 6cm$

نیز $b^2 = c^2 - a^2 = (6)^2 - (3)^2 = 27$

لہٰذا $b = 3\sqrt{3}\ cm$

پس $\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ وغیرہ وغیرہ

نوٹ: تکونیاتی نسبتیں معلوم کرتے ہوئے طلباء نے یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ مثلثوں کے اضلاع کی قیمتیں تبدیل ہونے سے زاویے کی نسبتوں کی قیمتوں پر کوئی اثر مرتب نہیں ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا اخذ کردہ نتائج ذیل کی جدول میں درج دیئے گئے ہیں۔

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

نوٹ: (i) جدول کا استعمال کرتے ہوئے دیگر مقداروں کے زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کی جاسکتی ہیں۔ تاہم یہ ہمارے نصاب کے دائرہ کار سے باہر ہے۔

(ii) تکونیاتی نسبتیں زاویوں کی مقداروں پر انحصار کرتی ہیں۔ یہ نسبتیں مثلث کے اضلاع کی جسامت پر انحصار نہیں کرتیں۔

سرگرمی: نسبتیں صرف زاویوں کی مقداروں پر انحصار کرتی ہیں۔

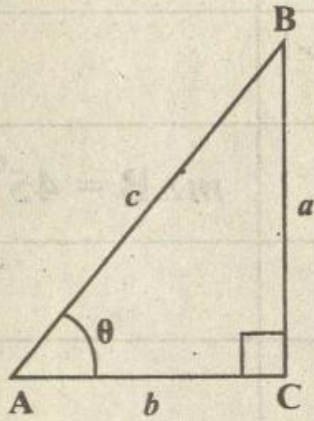
مثلث ΔABC میں $m\angle C = 90^\circ$ لیتے ہوئے خالی جگہیں پر کیجیے۔

نسبتیں			اضلاع			
$\tan\theta = \frac{b}{a}$	$\sin\theta = \frac{b}{c}$	$\cos\theta = \frac{a}{c}$	وتر c	عمود b	اساس a	
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1	1	$m\angle B = 45^\circ$ (i)
?	?	?	?	2	?	
?	?	?	?	2	?	
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	6	3	$3\sqrt{3}$	$m\angle B = 30^\circ$ (ii)
?	?	?	?	4	?	
?	?	?	?	5	?	
$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	8	$4\sqrt{2}$	4	$m\angle B = 60^\circ$ (iii)
?	?	?	?	?	5	
?	?	?	?	?	6	
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	?	4	3	(iv) کسی بھی مقدار کے زاویے کے لیے
?	?	?	?	8	6	
?	?	?	2	16	12	

(الف) اگر مثلث کے ہر ضلع کی مقدار نصف ہو تو تکونیاتی نسبتوں کی قیمتوں پر کیا اثر ہوگا؟

(ب) مندرجہ بالا سرگرمی کی ہر صورت کے لیے نسبتوں کے معکوس معلوم کیجیے۔

8.4 کمپلیمنٹری زاویوں کی تکونیاتی نسبتوں کا باہمی تعلق

سامنے کی شکل میں ABC ایک قائمہ مثلث ہے۔ جس میں زاویہ C قائمہ ہے اور $m\angle A = \theta$

چونکہ $\angle A$ اور $\angle B$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں اس لیے

$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - \theta$$

اب $\cos(m\angle B) = \dfrac{a}{c} = \sin(m\angle A)$

پس $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

نوٹ: قائمہ مثلث میں

حادہ زاویے کے لیے اساس = اس کے کمپلیمنٹری زاویے کے عمود

اسی طرح $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

اور $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

ان نتائج کو ہم ان الفاظ بیان کر سکتے ہیں:

"کمپلیمنٹری زاویوں کی مقداروں کے sine اور cosine , tangent اور cotangent , secant اور cosecent باہم مساوی ہوتے ہیں"۔

مثالیں:

$$\sec 30^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cot 60^\circ = \tan(90^\circ - 60^\circ) = \tan 30^\circ$$

$$\sin 45^\circ = \cos(90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$$

مشق 8.2

1۔ خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $\text{cosec } 60^\circ = \frac{1}{\ldots\ldots}$ (ii) $\sec 30^\circ = \frac{1}{\ldots\ldots}$

(iii) $\sec 60^\circ = \ldots\ldots$ (iv) $\sec 20^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \cos\ldots\ldots$

(v) $\cos 10^\circ = \cos(90^\circ - \ldots\ldots) = \sin \ldots\ldots$ (vi) $\tan 40^\circ = \tan(\ldots\ldots - 50^\circ) = \cot$

(vii) $\sec \ldots = \sec(90^\circ - 10^\circ) = \ldots 10$ (viii) $\text{cosec } 10^\circ = \sec \ldots\ldots$

(ix) $\tan 20^\circ = \ldots\ 70^\circ$

2۔ (الف) α کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $\sin\alpha$ کی قیمت ہے:

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ب) β کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $\cos\beta$ کی قیمت ہے:

(i) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{2}$

(ج) γ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $\tan\gamma$ کی قیمت ہے:

(i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(د) θ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $\sec\theta$ کی قیمت ہے:

(i) 2 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

3۔ مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے (جدول اور/یا کمپلیمنٹری زاویوں کا کلیہ اور معکوس رابطوں کا استعمال کرتے ہوئے)۔

(i) $\cot 45^\circ$ (ii) $\sec 45^\circ$ (iii) $\text{cosec } 45^\circ$

(iv) $\cot 30^\circ$ (v) $\sec 30^\circ$ (vi) $\text{cosec } 30^\circ$

(vii) $\cot 60^\circ$ (viii) $\sec 60^\circ$ (ix) $\text{sosec } 60^\circ$

(x) $\sin 30^\circ$ (xi) $\cos 30^\circ$ (xii) $\tan 60^\circ$

4۔ مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\sin 30^\circ \text{cosec} 30^\circ + \cos 30^\circ \sec 30^\circ$

(ii) $\cos 60^\circ \sin 60^\circ + \text{cosec } 60^\circ \sec 60^\circ$

(iii) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ - \tan 45^\circ - \cot 45^\circ$

(iv) $\sin 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$

(v) $\dfrac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$

$\dfrac{\cot 45^\circ \cos 30^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ}$

-5 پڑتال کیجیے۔

(i) $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$

(ii) $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \sec 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ$

(iii) $(\cos 60^\circ - \sin 60^\circ)^2 + 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 1$

(iv) $2 \sin 45^\circ + \dfrac{1}{2} \operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(v) $1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

(vi) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

(vii) $\dfrac{1 - \text{ten}^2 30^\circ}{1 + \text{ten}^2 30^\circ} = 1 - 2 \sin^2 30^\circ$

(viii) $1 + \tan^2 60^\circ = \sec^2 60^\circ$

(xi) $\cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ = \dfrac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$

(x) $1 + \cot^2 30^\circ = \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

8.5 بنیادی تکونیاتی متطابقات *(Fundamental Trigonometric Identities)*

سامنے کی شکل میں مثلث ACB ایک قائمہ مثلث ہے جس میں
زاویہ C ایک قائمہ زاویہ ہے
فرض کیجیے کہ $m\angle A = \theta$
مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$a^2 + b^2 = c^2 \;\ldots\ldots\; \textbf{(i)}$$

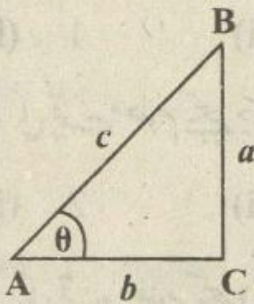
مساوات (i) کو c^2، a^2 اور b^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں بالترتیب مندرجہ ذیل تین متطابقات *(Identities)* حاصل ہوتے ہیں:

مساوات (i) کے دونوں اطراف کو c^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

یا $$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

یا $$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

متطابق (Identity) جمع متطابقات (Identities) ایسی مساوات ہوتی ہے جو متعلقہ متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہو۔

$(\sin\theta)^2$ کو $\sin^2$ اور $(\cos\theta)^2$ کو $\cos\theta^2$ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \qquad \text{.........} (1)$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کو b^2 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

یا $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

یا $(\tan\theta)^2 + 1 = \sec\theta)^2$

$(\tan\theta)^2$ کو $\tan\theta$ اور $(\sec\theta)^2$ کو $\sec^2\theta$ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta} \qquad \text{.........} (2)$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کو a^2 سے تقسیم کرنے سے

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

یا $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$

یا $1 + (\cos\theta)^2 = (\text{cosec}\theta)^2$

$(\cot\theta)^2$ کو $\cot^2\theta$ اور $(\text{cosec}\theta)^2$ کو $\text{cosec}^2\theta$ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta} \qquad \text{.........} (3)$$

متطابقات (1)، (2) اور (3)..... بنیادی متطابقات کہلاتی ہیں۔

مندرجہ بالا متطابقات کو ہم مندرجہ ذیل شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \quad , \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta = 1 - \sec^2\theta - 1 \quad , \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1 \quad , \quad \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

انہیں متطابقات کہتے ہیں کیونکہ یہ θ کی ہر قیمت کے لیے درست ہیں طلباء کو ہدایت کی جاتی ہے کہ 36°، 45° اور 60° کے زاویوں میں سے کسی ایک کے لئے ان متطابقات کی پڑتال کیجیے۔

نوٹ: $(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$ ، $(\cos\theta)^2 \neq \cos\theta^2$ ، $(\tan\theta)^2 \neq \tan^2\theta$ وغیرہ وغیرہ

مثال 1: ثابت کیجیے $\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

حل: ہمارے علم میں ہے کہ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

یا $$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

پس $$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

مثال 2: ثابت کیجیے: $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$, $\cos\theta \neq 0.$

حل

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)\ (1+\sin\theta)}{\cos\theta\ (1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)} \qquad (\because \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta)$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \text{R.H.S}$$

پس $$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

مثال 3: ثابت کیجیے: $(\text{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$, $\sin^2\theta \neq 0$

حل:

$$\text{L.H.S} = (\text{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta$$

$$= \cot^2\theta\ .\ \sin^2\theta \quad (\text{since. } \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\ \sin^2\theta$$

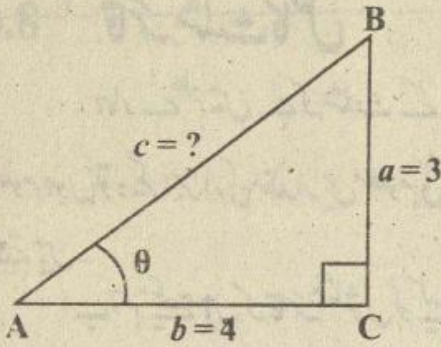
$$= \cos^2\theta \quad = \text{R.H.S}$$

پس $$(\text{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

یہ پڑتال کی جا سکتی ہے کہ $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ کے لیے مساوات درست ہے۔

مثال 4: اگر $\cot\theta = \frac{4}{3}$ تو دیگر تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\cot\theta = \dfrac{4}{3} = \dfrac{b}{a}$

جبکہ $a = 3\ ,\ b = 4$

مسئلہ فیثا غورث سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow c = 25 = 5$$

لہٰذا

$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{a}{c} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

مشق 8.3

1۔ ثابت کیجیے۔

(i) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(ii) $\sin\theta \cos\theta \sec\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$

(iii) $\cos\theta + \tan\theta \sin\theta = \sec\theta$

(iv) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta + \cos\theta \sec\theta = 2$

(v) $\tan\theta \cot\theta = 1$

2۔ ثابت کیجیے۔

(i) $1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$

(ii) $(\cos\theta - \sin\theta)^2 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

(iii) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

(iv) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \quad \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

(v) $\cot\beta + \tan\beta = \cot\beta\sec^2\beta$

(vi) $\frac{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{\cos} = \tan\gamma$

(vii) $\frac{1+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta - 1} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

(viii) $\frac{\cot^2\alpha - 1}{1+\cot^2\alpha} = 2\cos^2\alpha \pm 1$

(ix) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$

(x) $\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} = 2\sec^2\alpha$

(xi) $\frac{\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta} = \frac{\cot\beta - 1}{\cot\beta + 1}$

(xii) $\frac{1+\operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{cosecc}\gamma - 1} = \frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}$

3۔ اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ تو تکونیاتی مطابقات کا استعمال کرتے ہوئے دیگر تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

4۔ اگر $\tan\theta = \frac{3}{4}$ تو تکونیاتی مطابقات کا استعمال کرتے ہوئے دیگر تکونیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

8.6 قائمہ مثلث کا حل

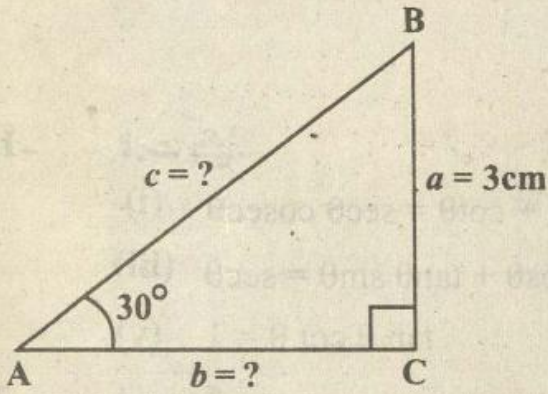
ہمارے علم میں ہے کہ مثلث کے چھ اجزاء ہوتے ہیں۔ اگر ان میں سے تین اجزاء جس میں کم از کم ایک ضلع ہو، کی مقداریں معلوم ہوں تو دیگر اجزاء کی مقداریں معلوم کی جا سکتی ہیں۔ مثلث کے نامعلوم اجزاء معلوم کرنے کے طریقہ کار کو ''مثلث کا حل کرنا'' کہتے ہیں۔

اب ہم سیکھتے ہیں کہ قائمہ مثلثوں کو کیسے حل کیا جاتا ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے قائمہ مثلثوں کے حل کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت کی جاتی ہے۔

8.6.1 پہلی صورت: جب ایک ضلع اور ایک زاویہ کی مقداریں معلوم ہوں۔

مثال 1. ΔABC حل کیجیے جبکہ $m\angle C = 90^\circ$، $m\angle A = 30^\circ$ اور $a = 3\text{cm}$

B, A, C, $c = ?$, $a = 3\text{cm}$, 30°, $b = ?$

حل: چونکہ $m\angle C = 90^\circ$، $m\angle A = 30^\circ$ اور $a = 3\text{cm}$

اس لئے ہمیں نامعلوم اجزاء b, c اور $m\angle B$ معلوم کرنا ہیں۔

تو
$$\tan(m\angle A) = \frac{a}{b}$$

یا
$$\tan 30^\circ = \frac{3}{b}$$

یا
$$b = \frac{3}{\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

لہٰذا
$$b = 3\sqrt{3}\text{cm} \quad ......(1)$$

اب
$$\sin(m\angle A) = \frac{a}{c}$$

یا
$$\sin 30^\circ = \frac{3}{c}$$

یا
$$c = \frac{3}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{2}}$$

لہٰذا
$$c = 6\text{ cm} \quad ......(2)$$

اور
$$m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

مسئلہ فیثاغورث کا استعمال کرتے ہوئے بھی ہم c معلوم کرسکتے ہیں۔

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$= (3)^2 + (3\sqrt{3})^2 = 9 + 27 = 36$$
$$\Rightarrow c = 6 \text{ cm}$$

(1)، (2) اور (3) مطلوبہ نامعلوم اجزاء ہیں۔

8.6.2 دوسری صورت: جب وتر اور ایک زاویہ کی مقداریں معلوم ہوں۔

مثال 2. ΔACB حل کیجیے جبکہ $m\angle C = 90^\circ$ ، $m\angle B = 60^\circ$ اور $c = 4\text{cm}$

حل: یہ معلوم ہے:

$c = 4\text{cm}$ اور $m\angle B = 60^\circ, m\angle C = 90^\circ$

B, 60°, c = 4cm, a = ?, ?, A, b = ?, C

اب ہمیں مثلث ACB کے نامعلوم اجزاء b, a اور $m\angle A$ معلوم کرنا ہیں۔

$$\sin(m\angle B) = \frac{b}{c}$$

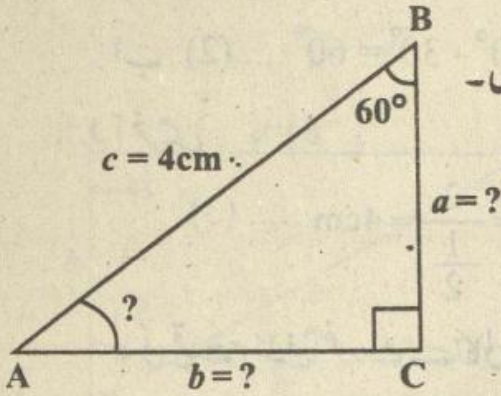
اب

یا $\sin 60^\circ = \frac{b}{4}$

یا $b = 4 \sin 60^\circ$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لہٰذا $b = 2\sqrt{3}\text{cm} \quad .....(1)$

اب $\cos(m\angle B) = \frac{a}{c}$

یا $\cos 60 = \frac{a}{4}$

یا $a = 4 \cos 60^\circ$

یا $a = 4 \left(\frac{1}{2}\right) \quad (\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$

$$\therefore a = 2 \text{ cm} \quad .....(2)$$

اور $m\angle A = 90^\circ - m\angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = ...(3)$

(1)، (2) اور (3) مطلوبہ نتائج ہیں۔

8.6.3 تیسری صورت: جب دو اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں۔

مثال 3. ΔACB حل کیجیے جبکہ $a = 2cm$ ، $b = 2\sqrt{3}$ اور $m\angle C = 90^\circ$

حل: اب ہمیں ΔACB کے نامعلوم اجزاء c ،

$m\angle A$ اور $m\angle B$ معلوم کرنا ہیں۔

اب $\tan(m\angle A) = \frac{a}{b}$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ہمارے علم میں ہے کہ $\frac{1}{3} = \tan 30^\circ$

لہٰذا $m\angle A = 30^\circ$ ...(1)

اب (2) .... $m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .... (2)

آخر میں $\sin 30 = \frac{a}{c}$

$$C = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4cm \quad .... (3)$$

c کی قیمت مسئلہ فیثا غورث سے نکالی جا سکتی ہے۔ اور اس معلومات کا استعمال کرتے ہوئے کہ

| 30 کے زاویے کے متقابلہ ضلع کی مقدار | 2 = | وتر کی مقدار |

$$\Rightarrow c = 2a$$

$$= 2 \times 2 = 4cm$$

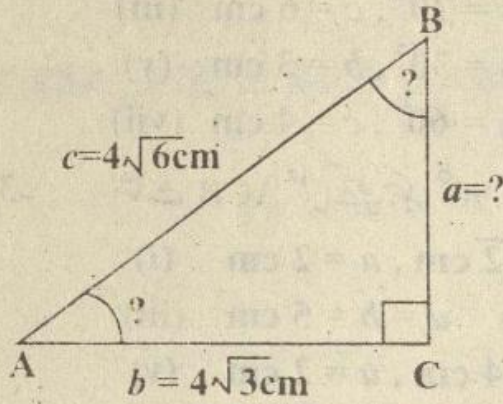
پس (1) ، (2) اور (3) مطلوبہ نتائج ہیں۔

8.6.4 چوتھی صورت: جب ایک ضلع اور وتر کی قداریں معلوم ہوں۔

مثال 4. ΔACB حل کیجیے جبکہ $m\angle c = 90^\circ$ ، $b = 4\sqrt{3}$ cm اور $c = 4\sqrt{6}$ cm

حل اب ہمیں ΔACB کے نامعلوم اجزاء $m\angle A$ ، $m\angle B$ اور a معلوم کرنا ہیں۔

تو $\cos(m\angle A) = \frac{b}{c}$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہمارے علم میں ہے کہ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$

لٰہذا $m\angle A = 45^\circ$ .... (1)

اب $m\angle B = 90^\circ - m\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ..... (2)

آخر میں $\sin 45^\circ = \frac{a}{c}$

یا $a = c \sin 45^\circ$

$= 4\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

یا $a = 4\sqrt{3}$ cm .... (3)

ہم a کی قیمت اس حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ:

$m\angle A = m\angle B$

$\Rightarrow a = b = 4\sqrt{3}$ cm

مشق 8.4

1۔ مندرجہ ذیل قائمہ مثلثوں کے نامعلوم اجزاء معلوم کیجیے۔

(i) R, $q = 1$, P, 30°, p, r, Q

(i)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

2- مثلث ACB حل کیجیے جبکہ $m\angle C = 90^\circ$ اور

(i) $m\angle B = 60^\circ, a = 2\ cm$ (ii) $m\angle A = 30^\circ, a = 4\ cm$

(iii) $m\angle B = 30^\circ, c = 6\ cm$ (iv) $m\angle A = 45^\circ, c = 3\sqrt{2}$

(v) $m\angle B = 30^\circ, b = 3\ cm$ (vi) $m\angle B = 45^\circ, b = 8\ cm$

(vii) $m\angle A = 60^\circ, c = 4\ cm$ (viii) $m\angle A = 45^\circ, a = 10\ cm$

3- مثلث ACB حل کیجیے جبکہ $m\angle C = 90^\circ$ اور

(i) $c = 10\sqrt{2}\ cm, a = 2\ cm$ (ii) $b = 2\sqrt{3}\ cm, a = 2\ cm$

(iii) $a = b = 5\ cm$ (iv) $c = 18\ cm, b = 9\ cm$

(v) $c = 4\ cm, a = 2\ cm$ (vi) $b = 3\ cm, a\ 3\sqrt{3}\ cm$

(vii) $c = 8\ cm, b = 4\sqrt{3}\ cm$

4- ایک مستطیل نما کھیت کے وتر کی لمبائی $(x+8)$ سینٹی میٹر ہے اور اس کے اطراف کی لمبائیاں x سینٹی میٹر اور $(x+4)$ سینٹی میٹر ہیں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

8.7 تکونیاتی نسبتوں کے استعمال سے بلندیاں اور فاصلے معلوم کرنا

اشیاء کی بلندیاں اور فاصلے معلوم کرنا بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ قائمۃ الزاویہ مثلثوں کو حل کرنا۔ اس قسم کے سوالات میں ہم دو اصطلاحات کو استعمال کرتے ہیں۔

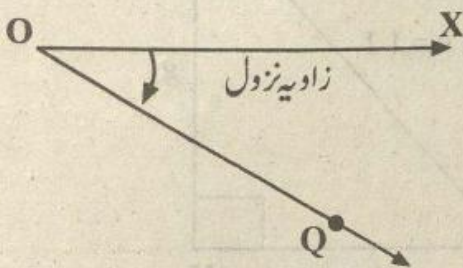
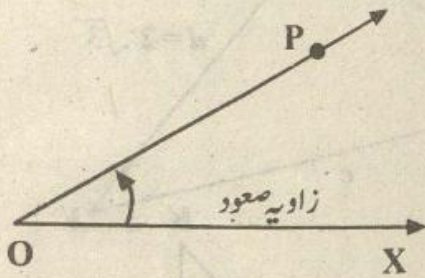
(1) زاویہ صعود *(Angle of Elevation)* (2) زاویہ نزول *(Angle of Depression)*

ذیل میں ان کی تعریف کی جاتی ہے

8.7.1 زاویہ صعود

سامنے کی شکل میں نقطہ O مشاہد *(Observer)* کے مقام کو ظاہر کرتا ہے۔ $\overrightarrow{OX}$ ایک افقی شعاع ہے اور P وہ نقطہ ہے جو $\overrightarrow{OX}$ سے اوپر واقع ہے۔ حاصل ہونے والا زاویہ POX نقطہ P کا زاویہ صعود کہلاتا ہے۔

8.7.2 زاویہ نزول

سامنے کی شکل میں نقطہ O مشاہد کے مقام کو ظاہر کرتا ہے $\overrightarrow{OX}$ ایک افقی شعاع ہے اور Q وہ نقطہ ہے جو $\overrightarrow{OX}$ کے نیچے واقع ہے حاصل ہونیوالا زاویہ XOQ نقطہ Q کا زاویہ نزول کہلاتا ہے۔

نوٹ: زاویہ صعود اور زاویہ نزول جس آلے سے ناپے جاتے ہیں اسے سُدس (Sextant) کہتے ہیں۔

8.7.3 جب ایک ضلع اور زاویہ صعود معلوم ہوں

مثال 1: زمین کے کسی مقام سے ستون کے پایے کا فاصلہ 100 میٹر ہے۔ اس مقام سے ستون کا زاویہ صعود 60° کا ہے۔ ستون کی انچائی معلوم کیجیے۔

حل: سامنے شکل میں $\overline{BC}$ ستون کو ظاہر کرتا ہے۔

$m\angle A = 60^\circ$ اور $m\angle C = 90^\circ$, $m\overline{AC} = 100$ m

ہمیں $\overline{BC}$ کی لمبائی معلوم کرنا ہے جو ستون کی اونچائی ہے۔

اب $\dfrac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} = \tan(m\angle A)$

چونکہ $m\angle A = 60^\circ$ اور $m\ \overline{AC} = 100$ cm اس لیے

$$\frac{m\,\overline{BC}}{100} = \tan 60^\circ$$

یا $m\,\overline{BC} = 100\ \times\sqrt{3}\quad (\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}\ )$

یا $m\,\overline{BC} = 100\ \times 1.732$

$m\,\overline{BC} = 173.2$

پس ستون کی اونچائی 173.2 میٹر ہے۔

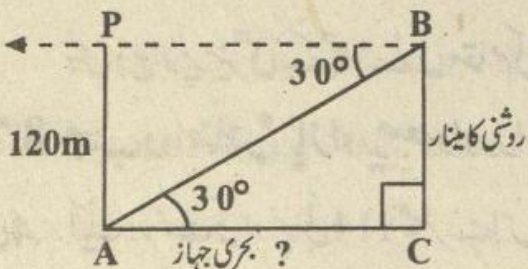
8.7.4 جب ایک ضلع اور زاویہ نزول معلوم ہوں

مثال 2. سمندر کے ساحل پر ایک روشنی کا مینار جو 120 میٹر اونچا ہے۔ مینار کی چوٹی سے ایک بحری جہاز کا زاویہ نزول 30° کا ہے مینار کے پایے اور جہاز کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: سامنے کی شکل میں فرض کیجیے کہ B روشنی کے مینار کی چوٹی ہے۔

$\overrightarrow{BP}$ افقی شعاع ہے۔ $\overline{BC}$ روشنی کے مینار کو ظاہر کرتا ہے۔ اور

$m\angle PBA = 30^\circ$

ہمیں $\overline{AC}$ کی مقدار معلوم کرنی ہے جو مینار کے پایے اور بحری جہاز کے درمیان مطلوبہ فاصلہ ہے۔

قائمہ مثلث ACB میں $m\overline{BC} = 120\,m$ اور $m\angle BAC = 30^\circ$ (کیونکہ $\angle PBA$ اور $\angle BAC$ متبادلہ زاویے ہیں)۔

لہٰذا
$$\tan 30^\circ = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}}$$

یا
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{120}{m\,\overline{AC}}$$

یا
$$m\,\overline{AC} = 120 \times \sqrt{3}$$

$$m\,\overline{AC} = 120 \times 1.732 = 207.84\ m$$

پس روشنی کے مینار کے پایے اور بحری جہاز کے درمیان فاصلہ 207.84 میٹر ہے۔

8.7.5 جب وتر اور زاویہ صعود ہوں

مثال 3. 12 میٹر لمبی سیڑھی دیوار پر اس طرح لگائی گئی ہے کہ وہ زمین سے 45 کا زاویہ بناتی ہے۔ دیوار پر اس مقام کی اونچائی معلوم کیجیے جہاں سیڑھی کا اوپری سرا اُسے چھوتا ہے۔

حل: سامنے کی شکل میں $\overline{AB}$ سیڑھی کو ظاہر کرتا ہے
اور BC دیوار پر مقام B کی اونچائی کو ظاہر کرتا ہے۔

B
سیڑھی 12m
دیوار
?
45
A C

قائمہ مثلث ACB میں $m\overline{AB} = 12\,m,\ m\angle A = 45^\circ$

اور ہمیں $m\,\overline{BC}$ معلوم کرنا ہے۔

اب
$$\frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AB}} = \sin(m\angle A)$$

یا
$$\frac{m\,\overline{BC}}{12} = \sin 45^\circ \quad (\because m\overline{AB} = 12m,\ m\angle A = 45)$$

یا
$$m\,\overline{BC} = 12 \times \sin 45^\circ$$

$$= 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

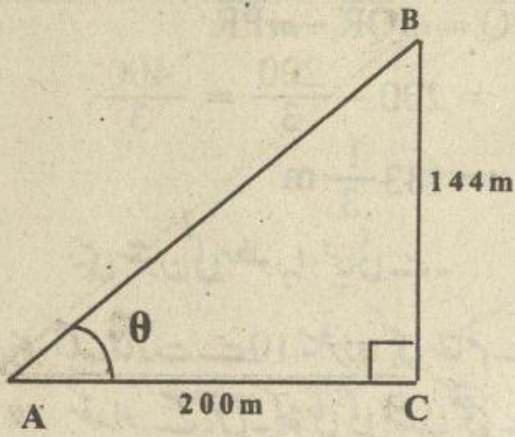
$$= 12 \times 0.7071$$

یا
$$m\,\overline{BC} = 8.485\ m$$

پس دیوار پر سیڑھی کے چھونے کی مقام کی اونچائی 8.485 میٹر ہے۔

8.7.6 جب دو اضلاع یا زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم ہوں

مثال 4. ایک درخت کی اونچائی 114 میٹر ہے اس سے 200 میٹر یا زمین پر ایک مقام سے اس کی چوٹی کا زاویہ صعود معلوم کیجیے۔

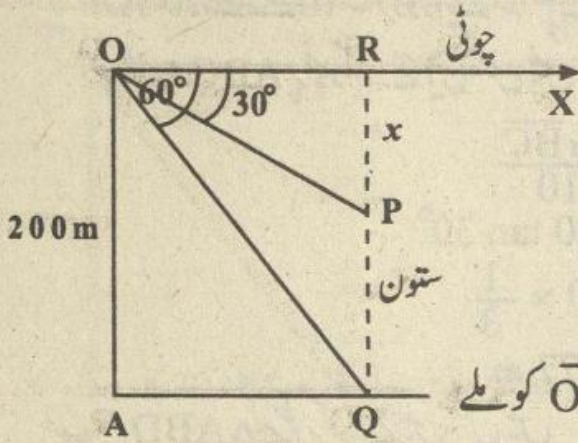
حل: فرض کیجیے کہ $\overline{BC}$ درخت کو ظاہر کرتا ہے اس سے 200 میٹر دور A زمین پر ایک مقام ہے۔

فرض کیجیے زاویہ ارتفاع کی مقدار $= \theta$

$$\tan\theta = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}}$$

$$= \frac{114}{200} = 0.57 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

چونکہ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اس لیے $\theta = 30^\circ$

پس زاویہ صعود کی مقدار 30° ہے۔

مثال 5. 200 میٹر اونچے پہاڑ سے ایک ستون کی چوٹی اور پایے کا زاویہ نزول بالترتیب 30° اور 60° ہیں۔ ستون کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ O پہاڑ کی چوٹی ہے۔ $\overrightarrow{OX}$ ایک افقی شعاع ہے۔ اور $\overline{PQ}$ ستون ہے۔

تو $m\angle POX = 30^\circ$

اور $m\angle QOX = 60^\circ$

اور $m\overline{AQ} = m\overline{OR}$

ہم $\overline{QP}$ کو P سے پرے اس طرح بڑھاتے ہیں کہ وہ نقطہ R پر $\overrightarrow{OX}$ کو ملے

فرض کیجیے: $m\overline{PR} = x$ اور $m\overline{OR} = y$ (x اور y میٹر میں ہیں)

ΔROQ میں:

$$\frac{m\,\overline{QR}}{m\,\overline{OR}} = \tan 60^\circ$$

یا $\frac{200}{y} = \sqrt{3}$ ... (i) $(\because m\overline{QR} = m\overline{AO} = 200\text{m})$

ΔROP میں:

$$\frac{m\,\overline{PR}}{m\,\overline{OR}} = \tan 30^\circ$$

یا $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ... (ii)

(i) کو (ii) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{200}{x} = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

یا $200 = 3x$

یا $x = \frac{200}{3}\text{ m}$

اب
$$m\overline{PQ} = m\overline{QR} - m\overline{PR}$$
$$= 200 - \frac{200}{3} = \frac{400}{3}$$
$$= 133\frac{1}{3}\ \text{m}$$

یہی ستون کی مطلوبہ اونچائی ہے۔

مثال 6. ایک عمارت سے 10 میٹر دور کسی مقام سے کھڑکی کے اوپری حصے اور نچلے حصے کے صعودی زاویے بالترتیب 30° اور 45° مقدار کے ہیں۔ کھڑکی کی بلندی کتنی ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ C اور D کھڑکی کے نچلے حصے اور اوپری حصے کو ظاہر کرتے ہیں اور A عمارت سے 10 میٹر دور ایک مقام ہے ہمیں $m\overline{CD}$ معلوم کرنا ہے۔

ہم مثلث ABC پر غور کرتے ہیں جس میں

$$\tan 30^\circ = \frac{m\overline{BC}}{10}$$
$$m\overline{BC} = 10\tan 30^\circ$$
$$= 10 \times \frac{1}{3}$$
$$= 5.77\ m$$

اب ہم ΔABD پر غور کرتے ہیں جس میں

$$\tan 45^\circ = \frac{m\overline{BD}}{10}$$
$$m\overline{BD} = 10\tan 45^\circ$$
$$= 10 \times 1 = 10\ \text{m}$$

پس
$$m\overline{CD} = m\overline{BD} - m\overline{BC}$$
$$= 10 - 5.77 = 4.23\ \text{m}$$

پس کھڑکی کی بلندی 4.23 میٹر ہے۔

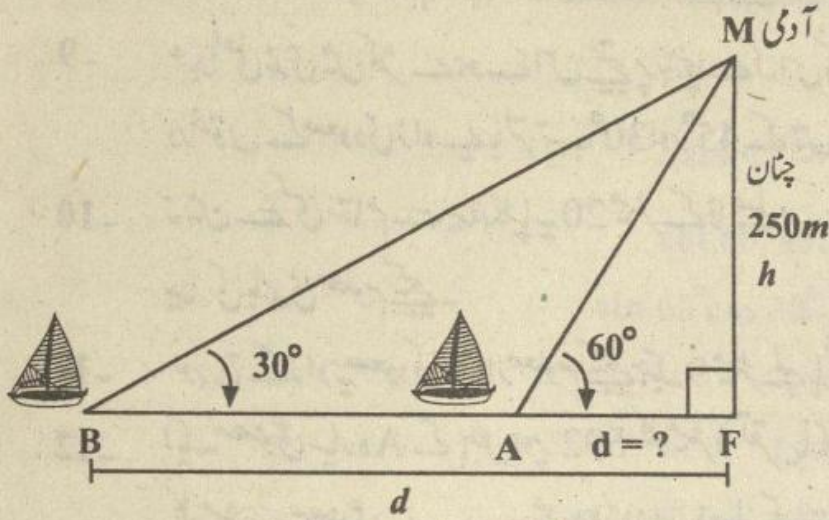
مثال 7. ذیل کی شکل میں 250 میٹر اونچی چٹان کی چوٹی پر ایک آدمی کھڑا ہوا ہے وہ دو بحری جہازوں A اور B کو دیکھتا ہے اور ان کے نزولی زاویے بالترتیب 60° اور 30° کے ہیں۔ ان دو بحری جہازوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: ΔMAF سے

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{d}$$
$$d = \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

$$= \frac{250}{1.73}$$

$$= 144.5\ m \quad .... (1)$$

ΔMBF سے $\tan 30° = \frac{h}{d}$

$$d = \frac{h}{\tan 30°}$$

$$= \frac{250}{0.57}$$

$$= 438.5\ m \quad ... (2)$$

لہٰذا مطلوبہ فاصلہ = $m\overline{AB}$

$m\overline{BF} - m\overline{AF}$

$d' - d =$

میٹر $294.09 =$

مشق 8.5

1. زمین پر کسی مقام سے ایک درخت 50 میٹر کے فاصلے پر ہے۔ اس مقام سے درخت کی چوٹی کا زاویہ صعود 30° کا ہے۔ درخت کی بلندی معلوم کیجیے۔
2. سمندر کے ساحل پر 100 میٹر بلند روشنی کا مینار ہے روشنی کے مینار کی چوٹی سے بحری جہاز کا زاویہ نزول 45° کا ہے مینار کے پایے اور جہاز کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔
3. 8 میٹر لمبی سیڑھی ایک دیوار پر اس طرح لگائی گئی ہے کہ وہ زمین سے 60° کا زاویہ بناتی ہے۔ دیوار پر اس جگہ کی بلندی معلوم کیجیے جہاں سیڑھی کا اوپری سرا اُسے چھوتا ہے۔
4. پتنگ سے 120 میٹر لمبی ڈور باندھی گئی ہے جبکہ وہ 60° کا زاویہ صعود پر ہے جو ہاتھ اسے تھامے ہوئے ہیں ان سے وہ کتنی بلند ہے؟
5. اگر 300 میٹر اونچے ستون کا سایہ 519 میٹر لمبا ہے تو سورج کا زاویہ صعود کی مقدار معلوم کیجیے۔
6. متماثل الساقین مثلث کے راسی زاویے (*V·rtical Angles*) کی مقدار 120° اور اساس 40 سینٹی میٹر لمبی ہے۔ اس کے ارتفاع (*Altitude*) کی لمبائی معلوم کیجیے۔
7. دریا کے کنارے 180 ڈیسی میٹر اونچا درخت دریا کے دوسرے کنارے سے براہ راست 30° کا زاویہ بناتا ہے دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

8- ایک مقام سے پہاڑ کی چوٹی کا زاویہ صعود 45° کا ہے اس مقام سے پہاڑی کی جانب 480 میٹر کے بعد چوٹی کا زاویہ صعود 60° کا ہو جاتا ہے۔ پہاڑی کی بلندی معلوم کیجیے۔

9- عبدالعلی ندی میں کھڑے ہوئے اس نتیجے پر پہنچا ہے کہ اس کی سیدھ میں ندی کے دونوں کناروں پر موجود 6 میٹر اور 8 میٹر بلند دو درختوں کے صعودی زاویے بالترتیب 30° اور 45° کے ہیں۔ ندی کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

10- زمین سے کسی مقام سے مینار کا پایہ 20 میٹر کے فاصلے پر ہے۔ اس مقام سے مینار کی چوٹی کا زاویہ صعود 60° کا ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔

11- سورج کے زاویہ صعود کی مقدار معلوم کیجیے جبکہ 9 میٹر لمبے بانس کا سایہ $3\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

12- ایک مصنوعی سیارہ A کے بالکل اوپر 692 کلومیٹر (تقریباً) کے فاصلے پر ہے۔ شہر A اور شہر B کے درمیان فاصلہ 400 کلومیٹر ہے مصنوعی سیارے سے شہر B کا زاویہ نزول کی مقدار معلوم کیجیے۔

13- ندی کے کنارے 14 میٹر بلند کھمبا دوسرے کنارے کے کسی مقام سے 30° کا زاویہ بناتا ہے ندی کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

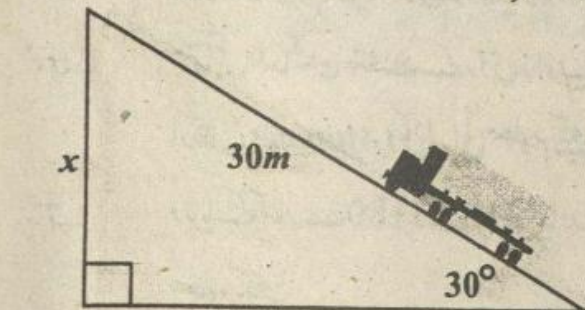
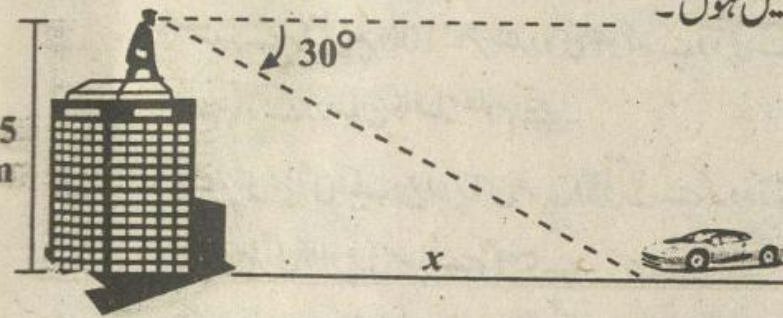
14- ایک بانس دیوار سے 45° کا زاویہ بناتا ہے اور دیوار پر $8\sqrt{2}$ میٹر بلندی تک پہنچتا ہے۔ بانس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

15- سمندر کی سطح سے روشنی کا مینار 750 ڈیسی میٹر بلند ہے۔ مینار کی چوٹی سے دو بحری جہازوں کی نزولی زاویے بالترتیب 30° اور 45° کے ہیں اگر بحری جہازوں کو ملانے والا خط روشنی کے مینار کے پایے سے گزرتا ہو تو جہازوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے جبکہ بحری جہاز مینار کے مخالف اطراف میں ہوں۔

16- زمین پر 25 میٹر بلند عمارت پر ایک آدمی کھڑا ہے اور زمین پر کار سے 30° کا زاویہ نزول بناتا ہے۔ آدمی کے قد کو نظر انداز کرتے ہوئے عمارت سے کار کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

17- دیوار سے لگائی گئی سیڑھی زمین سے 60° کا زاویہ بناتی ہے اور 60 ڈیسی میٹر کی بلندی تک پہنچی ہے سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

18- زمین سے 45° کے زاویے پر ایک پتنگ اڑ رہی ہے ڈوری کے جھول کو نظر انداز کرتے ہوئے ڈوری تقریباً 70 میٹر لمبی ہے زمین سے اوپر پتنگ کی بلندی معلوم کیجیے۔

19- ایک ٹرک 30 میٹر کی ڈھلوان پر چڑھتا ہے۔ اس کا زاویہ 30° کا ہے قریب ترین میٹر میں ٹرک کتنا اونچا (عمودی طور پر) چڑھا؟

متفرق مشق VII

1۔ ثابت کیجیے:

(i) $2 \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cot 60^\circ \cot 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ = 0$

(iii) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \text{sine } 30^\circ = \sin 30^\circ$

(iv) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

(v) $1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

(vi) $4 \tan 60^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \sin 30^\circ \cos 60^\circ = 1$

(vii) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

2۔ مندرجہ ذیل مطابقات کو ثابت کیجیے۔

(i) $2 \cos \theta \sec \theta - \tan \theta \cos \theta = 1$

(ii) $\sec \theta - \tan \theta \sin \theta = \cos \theta$

(iii) $\cos \theta \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \cot \theta$

(iv) $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} = \cot \theta$

(v) $\operatorname{cosec} \theta \sin \theta + \frac{1}{\cot^2 \theta} = \sec^2 \theta$

(vi) $\frac{\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \sin \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$

3۔ زمین سے سیڑھی 60° کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار پر 5 میٹر کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4۔ دریا کے کنارے 90 ڈیسی میٹر بلند درخت دریا کے دوسرے کنارے سے براہ راست 30° کا زاویہ بناتا ہے۔ دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

5۔ اگر 6 میٹر بلند کھمبا زمین پر $2\sqrt{3}$ میٹر کی لمبائی کا سایہ بناتا ہو تو سورج کا زاویہ صعود معلوم کیجیے۔

6۔ 300 میٹر بلند مینار چٹان کی چوٹی سے کسی مینار اور پایے کے نزولی کے زاویوں کی مقداریں بالترتیب 30° اور 60° ہیں مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔

7۔ خالی جگہیں پر کیجیے

(i) $\sec 30^\circ =$ ________ (ii) $\tan 60^\circ =$ ________

(iii) $\text{cosec}\, 60^\circ =$ ________ (iv) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\square}$

(v) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta =$ ________

(vi) $\sin(m\angle A)$ کا معکوس ________ ہے۔

(vii) $\sin^2(m\angle A) + \cos^2(m\angle A) =$ ________

(viii) $\sin 30^\circ = \text{cosec}$ ________

(ix) $\sqrt{1-\sin^2(m\angle A)} =$ ________

(x) $(\sin 45^\circ)^2 + (\cos$ ______ $)^2 = 1$

8۔ درست جواب پر دائرہ لگایئے۔

(i) $\sin 30^\circ$ کی قیمت ________ ہے۔

(a) 2 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) -2 (d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cot 60^\circ$ کی قیمت ________ ہے۔

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

(iii) $\sin(m\angle A) =$ ________

(a) $\dfrac{1}{\cos m\angle A}$ (b) $\dfrac{1}{\sin m\angle A}$ (c) $\dfrac{1}{\text{cosec}\, m\angle A}$ (d) $\dfrac{1}{\tan m\angle A}$

(iv) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ =$ ________

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 1

(v) $1 + \tan 45^\circ = \sec^2$ ________

(a) 30° (b) 90° (c) 60° (d) 45°

(vi) $1 + \cot^2 30^\circ = \text{cosec}^2$ ________

(a) 45° (b) 60° (c) 0° (d) 30°

جوابات

مشق 1.1

1. (i) $\{1\}$ (ii) $\{4\}$ (iii) $\{120\}$ (iv) $\{-1\}$
2. 5
3. 8
4. 2
5. 7
6. 7 سال
7. 63, 64, 65
8. 301, 303, 305
9. 18 سیب
10. لمبائی = 50cm, چوڑائی = 46cm

مشق 1.2

نوٹ: طلباء خود گراف بنائیں۔

1. $\{(3, -2)\}$
2. $\{(3, 1)\}$
3. $\{(3, 1)\}$
4. $\{(4, 7)\}$
5. $\{(8, 4)\}$
6. $\{(\frac{15}{2}, \frac{3}{2})\}$
7. $\{(0, 6)\}$
8. $\{(-3, 4)\}$
9. $\{(3, 2)\}$
10. $\{(3, 1)\}$

مشق 1.3

1. $\{12\}$
2. $\{\frac{4}{9}\}$
3. $\{9\}$
4. $\{225\}$
5. $\{\ \}$
6. $\{6\}$
7. $\{\frac{3}{2}\}$
8. $\{9\}$
9. $\{81\}$
10. $\{1\}$

مشق 1.4

1. $\{-2, 5\}$
2. $\{\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\}$
3. $\{-2, 2\}$
4. $\{-36, 36\}$
5. $\{-1, 7\}$
6. $\{-4, 2\}$
7. $\{-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\}$
8. $\{-6, \frac{26}{3}\}$
9. $\{\ \}$
10. $\{-4, 3\}$

مشق 1.5

1. $\{10, 11, 12, \ldots\}$
2. $\{b \in R \mid b < 3\}$
3. $\{1, 2, 3, 4\}$
4. $\{x \in R \mid x > -\frac{11}{3}\}$
5. $\{-6, -5, -4, -3, \ldots\}$
6. $\{x \in R \mid x < \frac{1}{2}\}$
7. $\{x \in R \mid x < \frac{19}{9}\}$
8. $\{x \in R \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{7}{2}\}$
9. $\{y \in R \mid -\frac{17}{3} < y < \frac{7}{3}\}$
10. $\{y \in R \mid y > -\frac{5}{12}\}$

11. $\{a \in Z \mid a \geq -5\}$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

12. $\{3, 4, 5\}$

1 2 3 4 5 6 7

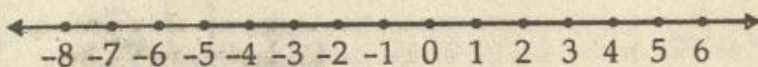
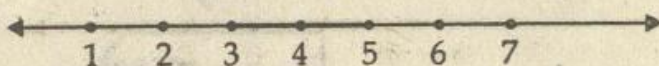
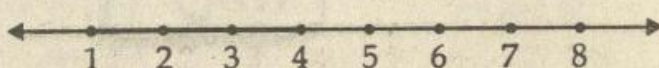
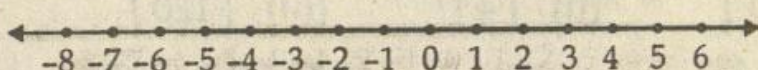
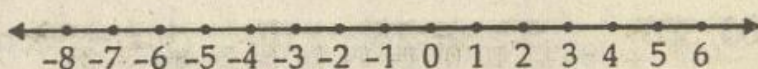
13. $\{1, 2, 3, 4\}$

1 2 3 4 5 6 7 8

14. $\{x \in R \mid x > -5\}$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

15. $\{x \in R \mid x > -3\}$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

مشق 1.6

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$
2. $5x^2 - 2x + 4 = 0$
3. $z^2 - 12z + 3 = 0$
4. $x^2 + 2x + 7 = 0$
5. $2p^2 - 5p + 2 = 0$
6. $s^2 - 2s - 15 = 0$
7. $2m^2 + 5m - 3 = 0$
8. $q^2 + 7q - 60 = 0$
9. $\{2, 3\}$
10. $\{-3, 2\}$
11. $\{3, \frac{7}{2}\}$
12. $\{3, \frac{31}{3}\}$
13. $\{-2, -\frac{3}{2}\}$
14. $\{-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$
15. $\{-1\}$
16. $\{2, 3\}$

مشق 1.7

1. $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
2. $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$
3. $\{\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\}$
4. $\{\frac{-1 - \sqrt{41}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}\}$
5. $\{\frac{5 - \sqrt{61}}{6}, \frac{5 + \sqrt{61}}{6}\}$
6. $\{-2, \frac{6}{5}\}$
7. $\{6 - \sqrt{33}, 6 + \sqrt{33}\}$
8. $\{\frac{2}{3}, 1\}$
9. $\{-1, 3\}$
10. $\{-61, 1\}$
11. $\{-8, 3\}$
12. $\{\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\}$

مشق 1.8

1. $\{-1, 5\}$
2. $\{-7, 9\}$
3. $\{-7, 8\}$
4. $\{-1, \frac{7}{3}\}$
5. $\{1, \frac{5}{2}\}$
6. $\{-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\}$
7. $\{-3, \frac{1}{2}\}$
8. $\{-\frac{4}{5}, 1\}$
9. $\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\}$
10. $\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$

متفرق مشق I

1. $\{2, 3\}$ 2. $\{1\}$ 3. $\{-3, 2\}$ 4. $\{-4, 10\}$

5. $k = -8 ; z = 5$ 6. لمبائی $= 6$ cm, چوڑائی $= 4$ cm

7. 2 8. $x = 5$ 9. لمبائی $= 11$ cm , چوڑائی $= 6$ cm or احاطہ $= 34$ cm

10. (i) $-(-5)$ (ii) $\{ y \mid y \in R \wedge y > \frac{5}{2} \}$ (iii) $\{ \quad \}$ (iv) $\{(4, 1)\}$

(v) یک درجی مساوات (vi) غیر ناطق مساوات (vii) دونوں (a) اور (c)

(viii) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ix) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ (x) $2, -3$

مشق 2.1

1. (i) $7b - 7 = 0$ (ii) $16 - 17b = 0$ (iii) $7x - 6 = 0$
(iv) $\frac{q^2}{p^2} + y = 0$ (v) $(b + c)^2 + b^2 = 0$

2. (i) $4x - 5y = 0$ (ii) $4ax - y^2 = 0$ (iii) $bx + a^2y = 0$
(iv) $2gs = v_f^2 - v_i^2$

3. (i) $2s = 2v_ft - 3gt^2$ (ii) $2s = 2v_ft - at^2$ (iii) $2gs = 2vfgt - g^2t^2$

4. (i) $4p^2 - 4q^2 - 4q = 5$ (ii) $b^2 - 4a^2 = 2$ (iii) $6a = 8a^3 - b^3$
(iv) $m^4 - b^4 = 2$ (v) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4p^2}}{p}$
(vi) $\frac{6 \pm \sqrt{36 - 40c}}{5} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48d}}{6}$

5. (i) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$ (ii) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 1$

6. (i) $(br - cq)(bp - aq) = (bc - ar)^2$ (ii) $-5(m + 3) = (l + 2m)^2$ (iii) $y = 7$

7. (i) $4y = x^2 - 4tx - 12$ (ii) $x = -2$ (iii) $2x - 3y = 0$

8. (i) $2 = 4c^2 - a^2$ (ii) $2 + 3a^2 = 0$
(iii) $4 = 4l^2 - (2m + 1)^2$ (iv) $3b = b^3 - a^3$

مشق 3.1

1. (i) $11:12$ (ii) $22:27$
2. (i) $1:4$ (ii) $1:1$ (iii) $54b:a$
3. (i) $x = 18$
4. $385:660$
5. 6
6. 49 ; 56
7. 78 ; 66
8. 25 ; 15
9. $a = -3$
10. (i) 20 (ii) 1
11. (i) 54 (ii) 12
12. (i) 3 (ii) 28
13. 9 ; 15 ; 6 ; 10
14. 5 ; 10 ; 20 ; 40
15. 9 ; 3 ; 1 or 1 ; 3 ; 9
16. $x = 6$
17. $x = 9$
19. $y = 18$; مطلوبہ ربط $y = 3x + x^2$ ہے

مشق 3.3

8. 2, 4, 8 9. $x = 3$ 10. $x = -\frac{11}{2}$ 11. $x = \frac{11}{2}$ 12. 2 13. $x = 26$ 14. $x = \frac{5}{4}$

مشق 3.4

1. 13 سم
2. 1610 فٹ ; 305.9 فٹ
3. 22.46 مکعب فٹ
4. 6 میٹر فی مربع سیکنڈ
5. 8 سم
7. 30 سم ; 55 سم ; 75 سم
8. 80 ڈیسی میٹر ; 64 ڈیسی میٹر ; 32 ڈیسی میٹر

متفرق مشق II

2. 3
3. $x = \frac{2}{3}$
4. 15 , 10 , 9 , 6 or 6 , 9 , 10 , 15
7. (i) $4:3$ (ii) 0 (iii) $4:1$
9. $3y^3 - xy + 4 = 0$
10. 6 فٹ
11. 16 دن
12. 105 اوراق
13. والد کی موجودہ عمر = 40 سال ; اس کے بیٹے کی موجودہ عمر = 12 سال
14. والد کی موجودہ عمر = 40 سال ; اس کے بیٹے کی موجودہ عمر = 20 سال
15. (i) $4:9$ (ii) $2:3$ (iii) نسبت (iv) c (v) معکوس
16. (i) F (ii) T (iii) F (iv) T (v) F (vi) T (vii) F (viii) F
17. (i) $a:b$ (ii) 0 (iii) $ac = b^2$ (iv) ± 30 (v) متبادل نسبت

مشق 4.1

4. (i) 53 (ii) 49 (iii) 46 (iv) 16 ; 15 (v) 29

5. اگر جماعتی وقفہ کی جسامت = 4 تو جماعتی وقفوں کی تعداد = 6

اور تعددات کی تعداد : 3, 4, 8, 4, 5, 4

6. کم از کم جماعتی تعدد = 1

کم از کم تعدد والے جماعتی وقفے ہیں : (35 — 31) اور (20 — 16) , (15 — 10)

مشق 4.3

2. (i) 12.22 (ii) 0 (iii) 14.04 4. 56.5

6. (i) 172.1 (ii) 184.5 (iii) 190 ; 195

7. (i) 36.46 (ii) 37.14 (iii) 37.43 9. نہیں ; دل

10. (i) 200 (ii) 94 (iii) 35 (iv) 121.5 11. 21.11

مشق 4.4

2. 25.15 4. (i) 19.2 (ii) 88.5

6. (i) 8.831 = سوکس میں معیاری انحراف ; 8.343 = اردو میں معیاری انحراف

طلباء سوکس کے مقابلے میں اردو میں بہتر ہیں۔

7. $x = 20$ کی وسعت ; $y = 20$ کی وسعت ; $z = 20$ کی وسعت ; ہاں ; نہیں

8. (i) 18 اور 28 (ii) 5 اور 9 (iii) $7 + \sqrt{2}$ اور $7 - \sqrt{2}$ (iv) 6 اور 8

9. 175.25 = تغیر ; 13.24 = معیاری انحراف

10. 65.69 = اوسط ; 2.82 = معیاری انحراف ; 81.25% ; 87.5% ; 100% ; 11.21%

12. (a) x کے لیے :

اوسط = 20 ; وسطانیہ = 20 ; عادہ = 0 ; وسعت = 20

y کے لیے :

اوسط = 20 ; وسطانیہ = 20 ; عادہ = 20 ; وسعت = 20

z کے لیے :

اوسط = 20 ; وسطانیہ = 20 ; عادہ = 10 ; 20 ; 30 ; وسعت = 20

w کے لیے :

اوسط = 20 ; وسطانیہ = 20 ; عادہ = 10 ; 30 ; وسعت = 20

(b) (i) اوسط = 25 ; وسطانیہ = 25 ; عادہ = 15 ; 35 ; وسعت = 20 ; S.D. = 8.66

(ii) اوسط = 15 ; وسطانیہ = 15 ; عادہ = 5 ; 25 ; وسعت = 20 ; S.D. = 8.66

(iii) اوسط = 80 ; وسطانیہ = 80 ; عادہ = 40 ; 120 ; وسعت = 80 ; S.D. = 34.66

(c) (i) عادہ کے علاوہ اوسط، وسطانیہ، وسعت اور انحراف میں تبدیلی اضافہ کی صورت میں ہوئی۔

(ii) عادہ کے علاوہ اوسط اور وسطانیہ میں تبدیلی کمی کی صورت میں اور وسعت اور انحراف میں تبدیلی اضافہ کی صورت میں ہوئی۔

متفرق مشق III

3. (i) 44.5 (ii) 44.5 (iii) 27 (iv) 5 (v) 25 (vi) (45 – 49)

4. 28 5. وسطانیہ = 4.5 ; عادہ = 6 6. 20.4

7. (a) غیر مسلسل متغیر (b) غیر مسلسل متغیر (c) غیر مسلسل متغیر

(d) مسلسل متغیر (e) مسلسل متغیر

8. (a) (i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) نہیں

(b) وسطانیے کے لیے :

(i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) نہیں

عادہ کے لیے :

(i) عادہ = 0 (ii) عادہ = 0 (iii) عادہ = 0 (iv) عادہ = 0

10. (i) 1.42 (ii) 1.42 12. (i) A.M. = 964 (ii) A.M. = 964 (iii) A.M. = 964

13. عالیہ 14. وسطانیہ = 33.33

15. (i) $x_1 = 7 + \sqrt{2}, x_2 = 7 - \sqrt{2}$ or $x_1 = 7 - \sqrt{2}, x_2 = 7 + \sqrt{2}$

(ii) $x_1 = 8$, $x_2 = 6$

(iii) $x_1 = 23 + 5\sqrt{2}$, $x_2 = 23 - 5\sqrt{2}$ or $x_1 = 23 - 5\sqrt{2}$, $x_2 = 23 + 5\sqrt{2}$

16. (i) تغیریت = 10 , معیاری انحراف = $\sqrt{10}$

(ii) تغیریت = 4 , معیاری انحراف = 2

(iii) تغیریت = 40.2 , معیاری انحراف = 6.34

17. (i) یکساں مشاہدات کا نمونہ

(ii) صرف ایک مشاہدے کا نمونہ

(iii) دہرائے بغیر مشاہدات کا نمونہ

(iv) درمیان میں صفر کے ساتھ طاق مشاہدات کا نمونہ

(v) صفر مشاہدات کا نمونہ یا اُن مشاہدات کا نمونہ جن کی علامات مخالف مگر مساوی عددی قیمتیں ہوں۔

18. (i) F (ii) F (iii) F (iv) F (v) F (vi) T (vii) F (viii) T
(ix) T (x) F (xi) F (xii) F

19. (i) Σfx (ii) 0 (iii) وسطانیہ (iv) 0 (v) 22 (vi) مربع
(vii) 50 (viii) 30 (ix) نہیں

20. (i) J (ii) I (iii) A (iv) B (v) G (vi) C (vii) H (viii) D
(ix) F (x) E

21. (i) *c* (ii) *c* (iii) *a* (iv) *b* (v) *a* (vi) *c* (vii) *c* (viii) *c*

مشق 5.1

2. (*a*) صرف ایک قطر، بہت سے وتر، صرف ایک رداسی قطعہ

(*b*) کوئی قطر نہیں، کوئی وتر نہیں، بہت سے رداسی قطعات

4. جی ہاں ; $m\overline{OA} = 4cm$　　5. 30° ; 30°

6. (i) دائرہ　(ii) رداس　(iii) رداسی قطعہ　(iv) رداسی قطعات　(v) قطر　(vi) وتر

7. (i) غلط　(ii) غلط　(iii) صحیح　(iv) صحیح

مشق 5.2

4. دائرے کے وتر جو مرکز سے ہم فاصلہ ہوں، متماثل ہوتے ہیں۔

6. دو متماثل دائروں میں متماثل وتریں مرکز سے ہم فاصلہ ہوتی ہیں۔

مشق 5.3

1. (b) 5 کلومیٹر
   (c) مسجد اور گاؤں P کا درمیانی فاصلہ = 4 کلومیٹر
   مسجد اور گاؤں Q کا درمیانی فاصلہ = 3 کلومیٹر

مشق 5.4

5. مطلوبہ لمبائی = 16 سینٹی میٹر

متفرق مشق IV

1. (i) تنصیف کرتا ہے　(ii) عمود　(iii) ہم فاصلہ　(iv) متماثل　(v) مماس
   (vi) صرف اور صرف ایک　(vii) عمودی ناصف　(viii) مرکز　(ix) دگنا　(x) حادہ
   (xi) مماس　(xii) عمود　(xiii) رداس　(xiv) مرکز　(xv) مساوی
   (xvi) 4　(xvii) 8　(xviii) 2　(xix) مماس　(xx) دائرہ
   (xxi) مرکز　(xxii) مرکز　(xxiii) متماثل　(xxiv) 90°

2. (i) صحیح　(ii) غلط　(iii) غلط　(iv) صحیح　(v) غلط

مشق 6.4

7. 2 سم ; 6 سم اور 3.5 سم ; 10.5 سم

مشق 6.7

1. (i) قائمہ مثلث (ii) قائمہ مثلث (iii) قائمہ مثلث (iv) قائمہ مثلث* (v) قائمہ مثلث نہیں ہے

2. (i) 25 فٹ 3. (a) $3\sqrt{3}$ اکائیاں (b) $x\sqrt{3}$ اکائیاں

متفرق مشق V

1. (i) خط مستقیم (ii) دو نقاط (iii) تین (iv) پلے فیئر (v) ان کے متناظرہ زاویے
(vi) تیسرا (vii) عمود (viii) b^2 (ix) وتر (x) ناصف

2. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

مشق 7.2

3. 6 سم 4. 6 سم 5. 5 سم 6. 6.9 سم 7. 6.7 سم

مشق 8.1

1. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط
(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط (ix) صحیح (x) غلط

2. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{4}{3}$ (iv) $\frac{3}{5}$ (v) $\frac{4}{5}$ (vi) $\frac{3}{4}$
(vii) $\frac{3}{4}$ (viii) $\frac{5}{3}$ (ix) $\frac{5}{4}$ (x) $\frac{4}{3}$ (xi) $\frac{5}{4}$ (xii) $\frac{5}{3}$

3. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) 1 (iv) 1 (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{2}$

6. (i) $\sec\theta$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta$ (iii) $\cot\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}\alpha$ (v) $\cot\alpha$ (vi) $\sec\alpha$

مشق 8.2

1. (i) $\sin 60°$ (ii) $\cos 30°$ (iii) $\frac{1}{\cos 60°}$ (iv) $70°$ (v) $80°\,;\,80°$
(vi) $90°\,;\,50°$ (vii) $80°$; cosec (viii) $80°$ (ix) cot
2. (*a*) (i) $30°$ (ii) $60°$ (iii) $45°$
(*b*) (i) $30°$ (ii) $45°$ (iii) $60°$
(*c*) (i) $45°$ (ii) $60°$ (iii) $30°$
(*d*) (i) $60°$ (ii) $45°$ (iii) $30°$
3. (i) 1 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{3}$ (v) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) 2
(vii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (viii) 2 (ix) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (x) $\frac{1}{2}$ (xi) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (xii) $\sqrt{3}$
4. (i) 2 (ii) $\frac{19\sqrt{3}}{12}$ (iii) $\sqrt{2}-2$ (iv) 0 (v) $2+\sqrt{3}$ (vi) $2+\sqrt{3}$

مشق 8.3

3. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$
4. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$

مشق 8.4

1. (i) $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $m\angle P = 60°$ (ii) $b = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{16}{\sqrt{3}}$, $m\angle B = 30°$
(iii) $m\angle D = 60°$, $m\angle F = 30°$, $e = 4$ (iv) $m = 10\sqrt{2}$, $n = 10$, $m\angle N = 45°$
(v) $g = 6\sqrt{3}$, $m\angle G = 60°$, $m\angle K = 30°$ (vi) $m\angle S = 45°$, $m\angle T = 45°$, $t = 8$
2. (i) $m\angle A = 30°$, $b = 2\sqrt{3}$ cm , $c = 4$ cm
(ii) $m\angle B = 60°$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm , $c = \frac{8}{\sqrt{3}}$ cm
(iii) $m\angle A = 30°$, $a = 3\sqrt{3}$ cm , $b = 3$ cm (iv) $m\angle B = 45°$, $a = b = 3$ cm
(v) $m\angle A = 60°$, $c = 6$ cm ; $a = 3\sqrt{3}$ cm

(vi) $m\angle A = 45^\circ$, $a = 8$ cm , $c = 8\sqrt{2}$ cm

(vii) $m\angle B = 30^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ cm , $b = 2$ cm

(viii) $m\angle A = 45^\circ$, $b = 10$ cm , $c = 10\sqrt{2}$ cm

3. (i) $b = 10$ cm , $m\angle A = m\angle B = 45^\circ$

(ii) $c = 4$ cm , $m\angle A = 30^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$

(iii) $m\angle A = m\angle B = 45^\circ$, $c = 5\sqrt{2}$ cm

(iv) $a = 9\sqrt{3}$ cm , $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle B = 30^\circ$

(v) $b = 2\sqrt{3}$ cm , $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$

(vi) $c = 6$ cm , $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle B = 30^\circ$

(vii) $a = 4$ cm , $m\angle A = 30^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$

4. $x = 12$

مشق 8.5

1. 28.87m 2. 100m 3. 6.93m 4. 60m 5. 30°
6. 11.55cm 7. 311.76dm 8. 1135.48m 9. 18.39m 10. 34.64m
11. 60° 12. 60° 13. 24.25m 14. 16m 15. 2049dm
16. 14.43m 17. 69.28dm 18. 49.5m 19. 1.5m

3. 5.77m 4. 15.59dm 5. 60° 6. 200m

7. (i) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iv) $\sin\theta$ (v) 1
(vi) $\text{cosec}\,(m\angle A)$ (vii) 1 (viii) 60° (ix) $\cos\,(m\angle A)$ (x) 45°

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\text{cosec}\,(m\angle A)}$ (iv) 1 (v) 45° (vi) 30°

فرہنگ اصطلاحات

آبادی: خصوصیات کے لحاظ کے تمام مشاہدات (ارکان) کا مجموعہ آبادی کہلاتا ہے۔

الجبری جملہ: اگر دو الجبری اظہاریوں کے درمیان > ، < ، = ، ≤ ، ≥ وغیرہ میں سے کسی علامت سے تعلق قائم کیا جائے تو ایسا تعلق الجبری جملہ کہلاتا ہے۔

اسقاط: دیئے گئے روابط سے ایک ایسا ربط معلوم کرنے کے عمل کو جو روابط میں شامل کسی مخصوص متغیر سے آزاد ہو، اسقاط کہلاتا ہے۔

ابتدائی مواد: معلومات جمع کرنے کے لیے جب اصل تحقیقات کی جاتی ہیں تو اس طرح حاصل ہونے والا مواد ابتدائی مواد کہلاتا ہے۔

اصل: دی گئی مساوات یا غیر مساوات متغیر کی جس قیمت پر درست ثابت ہوتی ہیں اس قیمت کو اصل کہتے ہیں۔

پائی گراف: اس ترسیمی شکل میں دائرے کو کئی قطعات میں اس طرح تقسیم کیا جاتا ہے کہ ان کے رقبے دی گئی مقدار کو جس نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے، اسی نسبت سے ہوتے ہیں۔

تغیر راست: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار بڑھے یا ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار کم ہو تو دونوں مقداروں کے درمیان اس تعلق کو تغیر راست کہتے ہیں۔

تعددی تقسیم: خام مواد کو منظم اور مختصر طریقے سے پیش کرنے کے عمل کو تعددی تقسیم کہتے ہیں جس میں مشاہدات کو مختلف گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور مشاہدات کی تعداد کو جو کسی گروہ میں آ رہے ہوں انہیں ان کے مقابل لکھا جاتا ہے۔

تعددی کثیر الاضلاع: جب کالمی نقشہ بن جائے تو مستطیلوں کی اوپر کی ضلعوں کے درمیانی نقطوں کو قطعات خطوط سے جوڑ دیتے ہیں۔ x محور کی بنیاد کو چھونے کے لیے ہم دونوں کناروں پر خط کو اگلے درمیانی نقاط سے x- محور کی حد تک بڑھا دیتے ہیں۔ اس طرح یہ گراف تعددی کثیر الاضلاع کا گراف کہلاتا ہے۔

تغیر معکوس: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار کم ہو اور ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار بڑھے تو دونوں مقداروں کا ایسا تعلق تغیر معکوس کہلاتا ہے۔

تناسب: جب دو نسبتیں $a:b$ اور $c:d$ برابر ہوں یعنی $a:b=c:d$ تو چاروں مقداریں a, b, c اور d تناسب میں کہلاتی ہیں۔ یہ مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔

تکونیات: تکونیات Trigonometry کے لغوی معنیٰ مثلث کی پیائش کے ہیں۔ یہ ریاضی کی وہ شاخ ہے جس میں مثلثوں سے متعلق مختلف مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

تکونیاتی نسبتیں: قائمہ مثلث کے کسی حادہ زاویے کے لیے کسی بھی دو اضلاع کی مقداروں کی نسبت تکونیاتی نسبت کہلاتی ہے۔

تغیر: مقداروں میں تبدیلی مثلاً درجہ حرارت، اشیاء کی قیمتیں، کسی ملک کی آبادی وغیرہ تغیر کہلاتی ہے۔

تغیریت: تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، کے مجموعہ کو ان کے مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

ثانوی مواد: ایسا مواد جو کم از کم ایک شماریاتی مرحلے سے گزر چکا ہو، ثانوی مواد کہلاتا ہے۔

جماعت: ایسا گروہ جو ایک ہی خصوصیات رکھنے والے مواد پر مشتمل ہو، جماعت کہلاتا ہے۔

جماعت بندی: وہ عمل جس میں مواد کو کئی گروہوں میں ان کی یکساں خصوصیات کی بنا پر ترتیب دے کر لکھا جائے، جماعت بندی کہلاتا ہے۔

جماعتی تعدد: کسی مخصوص جماعت میں مشاہدات کی تعداد، جماعتی تعدد کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفہ: جماعتی وقفہ جماعت کی وہ جسامت یا لمبائی ہے جو دو متواتر جماعتوں کی زیریں یا بالائی حدود میں فرق کے برابر ہوتی ہے۔

جماعتی حدود: ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی، چھوٹی قیمت کو زیریں جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔

جماعتی نشان: کسی جماعت کے وسطی نقطے کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے۔ یہ زیریں اور بالائی جماعتی حدود کا اوسط ہوتا ہے۔

حسابی اوسط: حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مشاہدات کے مجموعہ کو ان کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

دائرہ: مستوی کے کسی ایک معین (Fixed) نقطہ سے ہم فاصلہ نقاط کا سیٹ دائرہ کہلاتا ہے۔ معین نقطہ کو دائرے کا مرکز کہتے ہیں۔

دائرے کا محیط: کسی دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ تمام نقاط کو ملانے والے خط یعنی دائرے کی لمبائی کو دائرے کا محیط کہتے ہیں۔

دائروی چوکور: ایسا چوکور جس کے راس دائرے پر واقع ہوں، دائروی چوکور کہلاتا ہے۔

دائرے کا بیرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے زیادہ ہو، دائرے کا بیرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا اندرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے کم ہو دائرے کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا خط قاطع: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو دو نقاط پر قطع کرے، دائرے کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

دائرے کا سیکٹر: دائرے کے کوئی سے دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائروی علاقہ دائرے کا سیکٹر یا قطع دائرہ کہلاتا ہے۔

دو درجی مساوات: ایسی مساوات جس میں متغیر کا زیادہ سے زیادہ قوت نما دو ہو، دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

رداسی قطعہ: دائرے کے مرکز سے اس کے کسی بھی نقطے کو ملانے والا قطعہ خط رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔

رداس: رداسی قطعہ کی لمبائی رداس کہلاتی ہے۔

راست مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترکہ مماسوں میں سے ہر ایک کے نقطہ مماس، دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ایسے مشترک مماس راست مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

زاویہ نزول: مشاہد کی آنکھ کی سیدھ میں کسی نقطے سے نیچے کسی نقطہ تک بننے والا زاویہ، زاویہ نزول کہلاتا ہے۔

زاویہ صعود: مشاہد کی آنکھ کی سیدھ میں کسی نقطے سے اوپر کسی نقطہ تک بننے والا زاویہ، زاویہ صعود کہلاتا ہے۔

سعت: دیئے گئے مواد میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو سعت کہتے ہیں۔

طرفین: تناسب $a : b = c : d$ میں a اور d طرفین کہلاتے ہیں۔

عادہ: دیئے گئے مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔

غیر مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت > یا < ہو غیر مساوات کہلاتا ہے۔

غیر مسلسل متغیر: غیر مسلسل متغیر صرف مکمل عدد کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثلاً خاندان میں بچوں کی تعداد وغیرہ۔

غیر مسلسل مواد: ایسا مواد جو غیر مسلسل متغیر سے متعلق ہو، غیر مسلسل مواد کہلاتا ہے۔

قطر: دائرے کے مرکز سے گزرتا ہوا وتر قطر کہلاتا ہے۔

قوس: دائرے کا کوئی سا حصہ قوس کہلاتا ہے۔

قوس صغیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے چھوٹی ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کا مرکزی زاویہ: کوئی قوس دائرے کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے اس کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

قوس کا محصور زاویہ: کسی قوس سے بننے والے ایسے زاویہ کو محصور زاویہ کہتے ہیں۔ جس کا راس قوس کا کوئی نقطہ ہو اور جس کے بازو قوس کے سروں سے گزریں۔

قائمہ مثلث: ایسی مثلث جس کے ایک زاویے کی مقدار 90° ہو یعنی زاویہ قائمہ ہو، قائمہ مثلث کہلاتا ہے۔
قائمہ مثلث کے قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع وتر کہلاتا ہے۔ اس کے زیر بحث زاویہ کے سامنے والا ضلع عمود اور اس سے متصلہ ضلع قاعدہ کہلاتا ہے۔

کالمی شکل: یہ مواد کو ترسیمی طور پر پیش کرتی ہے۔ اس میں ایک ہی چوڑائی کے افقی (یا عمودی) کالم ہوتے ہیں۔ جن کی لمبائیاں دی گئی کی قیمتوں کی نسبت سے دی جاتی ہیں۔

کالمی نقشہ: کالمی نقشہ متصلہ عمودی مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

کھلے جملے: ایسے جملے جن کے غلط یا صحیح ہونے کے لیے دی گئی شرائط کو مکمل کرنا ضروری ہو، کھلے جملے کہلاتے ہیں۔

گروہی مواد: مواد کو کئی گروہوں میں اپنی ضرورت کی بنا پر ترتیب دیا جائے تو اس مواد کو گروہی مواد کہتے ہیں۔

متغیر: ایسی مقدار جس کی قیمت متعین نہ ہو بلکہ بدلتی رہے، متغیر کہلاتی ہے۔

معیاری انحراف: معیاری انحراف، تغیریت کا مثبت جذر المربع ہے۔

مقداری متغیر: ایسا متغیر جس کی قیمت عددی ہو، مقداری متغیر کہلاتا ہے۔

معلومات داری: معلومات کو تجزیۓ اور توضیح کے لیے مناسب طریقے سے پیش کرنے کا نام معلومات داری ہے۔

مسلسل متغیر: مسلسل متغیر ایک ایسا متغیر ہے جس کی مقدار کو حقیقی عدد سے ظاہر کیا جا سکے۔ مثلاً کسی شخص کی عمر

مواد: مخصوص خصوصیات کی حامل ماہیتی یا مقداری معلومات مواد کہلاتی ہے۔

موادسیٹ: مخصوص مقصد کے لیے جمع کردہ مواد کو موادسیٹ کہتے ہیں۔

مطلق قیمت: ہر غیر صفر حقیقی عدد x کی مطلق قیمت $|x|$ ہمیشہ مثبت ہوتی ہے یعنی

$$|x| = x \ , \ \forall \ x \geq 0$$
$$= -x \ , \ \forall \ x < 0$$

اور حقیقی عدد صفر کی مطلق قیمت صفر ہوتی ہے۔

مسلسل تناسب: تین مقداریں a , b اور c مسلسل تناسب میں کہلاتی ہیں اگر

$$a : b = b : c$$

مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت = ہو، مساوات کہلاتا ہے۔

مثلث کا محاصر دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہے، مثلث کا محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا محصور دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں اضلاع سے مس کرتا ہے۔ مثلث کا محصور دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا جانبی دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی طور پر اور دیگر دو بڑھے ہوئے اضلاع کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔
مثلث کا جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

متماثل دائرے: ایسے دائرے جن کے رداس مساوی ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

مماس: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو صرف اور صرف ایک نقطے پر مس کرے، مماس کہلاتا ہے۔

معکوس مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترک مماسوں میں ہر ایک کے نقاط مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط کے مخالف
اطراف میں ہوں تو دائروں کے ایسے مشترک مماس، معکوس مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

نصف دائرہ: دائرے کے نصف محیط پر مشتمل شکل نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

نسبت: ایک جیسی مقداروں a اور b کی نسبت اس طرح ہوتی ہے۔

$$a : b = \frac{a}{b}$$

a اور b اس کی رقوم کہلاتی ہیں۔ a مقدم اور b موخر کہلاتی ہے۔

نمونہ: آبادی کے تحتی سیٹ کو نمونہ کہتے ہیں۔

وسطین: تناسب a : b = c : d میں b اور c وسطین کہلاتے ہیں۔

وسطانیہ: جب مواد کسی ترتیب یعنی بڑھتی یا گھٹتی ہوئی صورت میں ہو تو وسطانیہ وہ قدر ہے جو اس پورے مواد کو دو برابر حصوں
میں تقسیم کردے یعنی مواد کا پچاس فیصد وسطانی قدر سے پہلے اور پچاس فیصد اس کے بعد ہوتا ہے۔

وتر: ایسا قطعہ خط جس کے دونوں سرے دائرے کے نقاط ہوں، وتر کہلاتا ہے۔

ہم مرکز دائرے: ایسے دائرے جن کے مرکز ایک ہی نقطہ ہو، ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

تیار کردہ : سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

منظور شدہ : وفاقی محکمہ تعلیم اسلام آباد بطور نصابی کتاب برائے مدارس صوبہ سندھ

قومی کمیٹی برائے جائزہ کتب نصاب کی تصحیح شدہ

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد　　کشورِ حسین شاد باد
تُو نشانِ عزمِ عالی شان　　ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد

پاک [illegible] کا نظام　　قوّتِ اُخوّتِ عوام
قو[illegible] [illegible]ندہ　　تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد

پرچمِ ستارہ و ہلال　　رہبرِ ترقّی و کمال
ترجمانِ ماضی، شانِ حال　　جانِ استقبال
سایۂ خُدائے ذُوالجلال

سلسلہ وار نمبر　　پبلشر کوڈ نمبر 86

ماہ و سالِ اشاعت	ایڈیشن	تعداد	قیمت
Aug-2007	2nd	10,000	35.70